ВЗФЭИ. Контрольная работа № 1

Задача 1. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 1 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Перенесем свободные члены в правую часть системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 = -3. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера. Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \\ 5 & -6 & 11 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 11 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(55-18) - 4(-22+15) + 7(12-25) = 48 \neq 0.$$

Решение системы существует и единственно.

Найдем дополнительные определители, подставляя последовательно столбец свободных членов на место первого, второго и третьего столбцов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -6 & 11 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 11 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(55-18) - 4(11-9) + 7(-6+15) = -37 - 8 + 63 = 18$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(11-9) + 1(-22+15) + 7(6-5) = 6 - 7 + 7 = 6.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(-15+6) - 4(6-5) - 1(12-25) = -27 - 4 + 13 = -18.$$

Тогда по формулам Крамера получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{48} = -\frac{3}{8}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{3}{8},\ x_2 = \frac{1}{8},\ x_3 = -\frac{3}{8}.$

Задача 2. Найти предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+7xe^{-x}}.$$

Решение.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+7xe^{-x}} = (\infty - \infty) =$ умножим и поделим на сопряженное выражение

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+7xe^{-x}}\right)\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+7xe^{-x}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+7xe^{-x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+5-x^2-7xe^{-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+7xe^{-x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(5-7xe^{-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+7xe^{-x}}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5/x-7e^{-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+5/x^2}+\sqrt{1+7e^{-x}/x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(5/x-7e^{-x}\right)}{\left(\sqrt{1+5/x^2}+\sqrt{1+7e^{-x}/x}\right)}=\frac{(0-7\cdot 0)}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+7\cdot 0}\right)}=0.$$

Задача 3. Найти производную функции:

$$y=\sqrt[3]{\ln(2x+1)}-x^7e^{5x+6}+3\ln 7.$$

Решение.

$$y'=\left(\sqrt[3]{\ln(2x+1)}-x^7e^{5x+6}+3\ln 7\right)'=\left(\left(\ln(2x+1)\right)^{1/3}-x^7e^{5x+6}+3\ln 7\right)'$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln(2x+1)\right)^{1/3-1}\left(\ln(2x+1)\right)'-7x^6e^{5x+6}-x^7e^{5x+6}(5x+6)'+0=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln(2x+1)\right)^{-2/3}\frac{}{2x+1}(2x+1)'-7x^6e^{5x+6}-5x^7e^{5x+6}=$$

$$=\frac{1}{3\left(\ln(2x+1)\right)^{2/3}}\frac{2}{2x+1}-7x^6e^{5x+6}-5x^7e^{5x+6}.$$

Задача 4. Имеется 24 рулона металлической сетки по 10 м длиной каждый. Определить размеры наибольшего огорода прямоугольной формы, который можно обнести этой сеткой, используя в качестве одной из сторон стену близлежащего здания.

Решение. Пусть огород имеет стороны x м и y м ($x, y > 0$ по смыслу задачи). Нужно найти огород наибольшей площади, то есть найти максимум функции $S = xy \to \max$. Используем дополнительное условие, что три стороны огорода можно обнести сеткой длиной 240 м (четвертая сторона примыкает к зданию), то есть $2x + y = 240$, откуда можно выразить, например, $y = 240 - 2x$. Подставляем в функцию и получаем задачу:

$$S = x(240 - 2x) \to \max, \quad x > 0.$$

Чтобы найти максимум функции, вычислим производную и приравняем к нулю:

$$S' = \left(x(240 - 2x)\right)' = \left(240x - 2x^2\right)' = 240 - 4x = 0,$$
$$240 = 4x,$$
$$x = 60.$$

Нашли критическую точку $x = 60$. Проверим, что это действительно точка максимума. Вычислим вторую производную: $S'' = \left(240 - 4x\right)' = -4 < 0$, поэтому это точка максимума.

Таким образом, нужно выбрать стороны огорода равными $x = 60$ м и $y = 240 - 2x = 240 - 120 = 120$ м (причем длинная сторона примыкает к зданию), при этом площадь огорода будет наибольшей и составит $S = xy = 60 \cdot 120 = 7200$ м^2.

Задача 5. Найти точку пересечения касательных, проведенных к параболе $2y = 8 + x^2$ в точках ее пересечения с параболой $4y = 5x^2 + 4$. Сделать чертеж.

Решение. Сначала найдем точки пересечения парабол, в которых потом проведем касательные:

$$\begin{cases} 2y = 8 + x^2, \\ 4y = 5x^2 + 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = 2x^2 + 16, \\ 4y = 5x^2 + 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -3x^2 + 12, \\ 4y = 5x^2 + 4, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Получили две точки: $M_1(2,6)$ и $M_2(-2,6)$.

Проведем через эти точки касательные к параболе $2y = 8 + x^2$ или $y = 4 + x^2/2$. Общее уравнение касательной имеет вид: $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

1) точка $M_1(2,6)$. $x_0 = 2$, $y(x_0) = 6$, $y' = x$, $y'(x_0) = 2$. Получаем:

$$y-6=2(x-2),$$
$$y=2x-4+6,$$
$$y=2x+2.$$

2) точка $M_2(-2,6)$. $x_0=-2$, $y(x_0)=6$, $y'=x$, $y'(x_0)=-2$. Получаем:

$$y-6=-2(x+2),$$
$$y=-2x-4+6,$$
$$y=-2x+2.$$

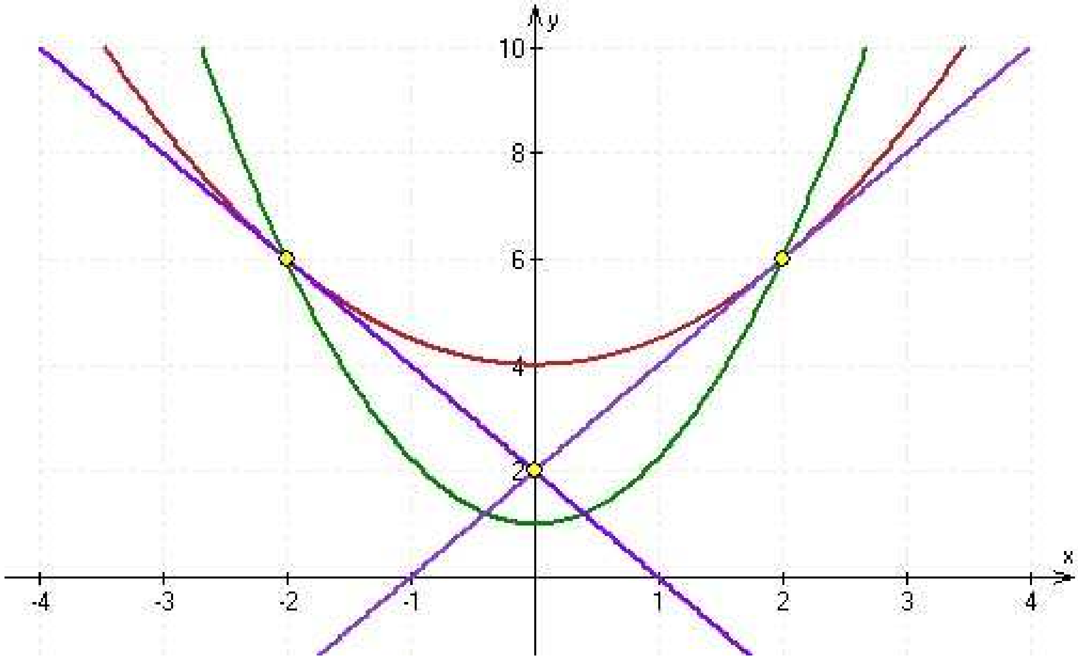
Находим точку пересечения касательных:

$$\begin{cases} y=2x+2, \\ y=-2x+2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$$

Точка $K(0,2)$.

Сделаем чертеж:



Задача 6. Исследовать функцию $y=\frac{x+1}{\sqrt{0,5x^2+0,5}}$ и построить схематично ее график.

Решение. Запишем функцию в следующем виде:

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{0,5x^2+0,5}}=\frac{x+1}{\sqrt{1/2}\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1) Область определения – вся числовая прямая $D(y)=(-\infty;+\infty)$, точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2) Точки пересечения с осями координат.

Ось Ox: $y=\sqrt{2}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=0$, $x=-1$, точки (-1; 0)

Ось Oy: $x=0$, $y=\sqrt{2}\approx 1,4$, точка (0; 1,4).

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\sqrt{2}\frac{-x+1}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-\sqrt{2}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\neq \pm y(x).$$

4) Экстремумы и монотонность.

Вычисляем первую производную и приравниваем к нулю:

$$y'=\left(\sqrt{2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\sqrt{2}\frac{x^2+1-x(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=,$$

$$=\sqrt{2}\frac{x^2+1-x^2-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\sqrt{2}\frac{1-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=0$$

Критическая точка: $x=1$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит области определения функции.

y' + –

y 1

↗ ↘

Функция возрастает на интерваех $(-\infty;1)$, убывает на интервале $(1;+\infty)$. Функция имеет максимум при $x=1$, $f(1)=2$.

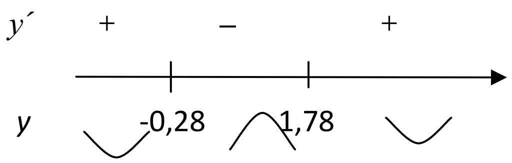
5) Выпуклость, точки перегиба.

$$y''=\left(\sqrt{2}\frac{1-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}\right)'=\sqrt{2}\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3-(1-x)3\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^6}=$$

$$=\sqrt{2}\frac{-x^2-1-3x(1-x)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}=\sqrt{2}\frac{-x^2-1-3x+3x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}=\sqrt{2}\frac{-1-3x+2x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}$$

Критические точки: $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}\approx 1,78$, $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}\approx -0,28$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервалах $(-\infty;-0,28)$, $(1,78;+\infty)$, выпукла вверх на интервале $(-0,28;1,78)$. Точки перегиба:

$$x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}\approx 1,78,\ y\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\approx 1,93$$

$$x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}\approx -0,28,\ y\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)\approx 0,98$$

6) Найдем наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2}\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2}\frac{1+1/x}{\sqrt{x^2+1}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x^2}} = \sqrt{2}$$

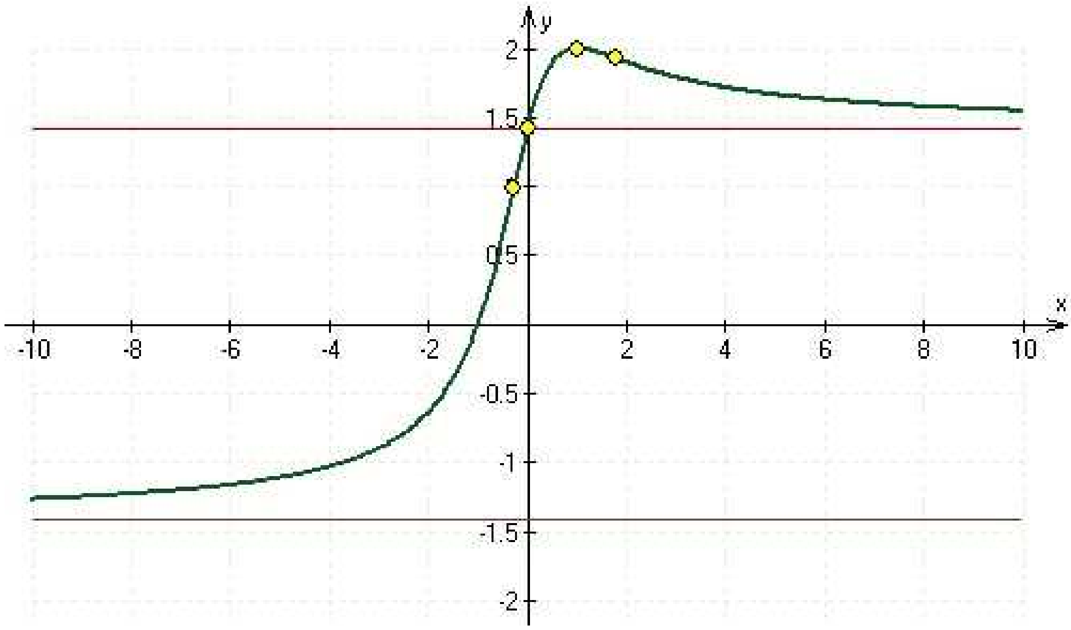
Получили горизонтальную асимптоту $y = \sqrt{2}$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2}\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2}\frac{1+1/x}{\sqrt{x^2+1}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y-kx) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2}\frac{-1+1/x}{\sqrt{1+1/x^2}} = -\sqrt{2}$$

Получили горизонтальную асимптоту $y = -\sqrt{2}$.

7) Строим график, отмечаем ключевые точки и асимптоты.


y
2
1.5
0.5
x
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
-0.5
-1
-1.5
-2