

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

МИРЭА. Пример решения типового расчета по теории вероятностей

Вариант 16

Задача 1. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна $p_1=0,4$, вторым - $p_2=0,65$. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y - числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

Решение. Введем дискретные случайные величины:

X = (Число израсходованных первым орудием снарядов),

Y = (Число израсходованных вторым орудием снарядов).

Они могут принимать значения 1, 2, 3, ... (для X) и 0, 1, 2, ... (для Y). Найдем соответствующие вероятности и составим законы распределения.

$X = 1$, если первый выстрел попал в цель, вероятность этого $P(X = 1) = 0,4$. Это же соответствует событию $Y = 0$ (второе орудие вообще не стреляет в этом случае), $P(Y = 0) = 0,4$.

$Y = 1$, если первое орудие не попало в цель, а второе попало своим первым выстрелом, вероятность $P(Y = 1) = (1 - 0,4) \cdot 0,65 = 0,6 \cdot 0,65$

$X = 2$, если при первых выстрелах оба орудия дали промах, при втором выстреле первое орудие попало в цель, вероятность $P(X = 2) = (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,65) \cdot 0,4 = 0,6 \cdot 0,35 \cdot 0,4$.

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$Y = 2$, если при первых выстрелах оба орудия дали промах, при втором выстреле первое орудие дало промах, а второе попало в цель, вероятность

$$P(Y = 2) = (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,65) \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,65 = 0,6^2 \cdot 0,35 \cdot 0,65.$$

$X = 3$, если при первых двух выстрелах оба орудия дали промах, при третьем выстреле первое орудие попало в цель, вероятность $P(X = 3) = (1 - 0,4)^2 \cdot (1 - 0,65)^2 \cdot 0,4 = 0,6^2 \cdot 0,35^2 \cdot 0,4.$

$Y = 3$, если при первых двух выстрелах оба орудия дали промах, при третьем выстреле первое орудие дало промах, а второе попало в цель, вероятность

$$P(Y = 3) = (1 - 0,4)^2 \cdot (1 - 0,65)^2 \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,65 = 0,6^3 \cdot 0,35^2 \cdot 0,65.$$

Аналогично продолжая далее, получим, что законы распределения следующие:

$$P(X = k) = 0,6^{k-1} \cdot 0,35^{k-1} \cdot 0,4, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(Y = 0) = 0,4, \quad P(Y = k) = 0,6^k \cdot 0,35^{k-1} \cdot 0,65, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Задача 2. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X :

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ C(x^2 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: постоянную C , интегральную функцию $F(x)$. Вероятность попадания СВ X в интервал $(0,5; 1,5)$.

Решение. Найдем константу C из условия нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C \int_1^2 (x^2 - x)dx = C \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = C \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}C = 1, \text{ откуда находим}$$

$$C = \frac{6}{5}, \text{ то есть}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{6}{5}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Получаем:

$$\text{Пусть } x < 1, \text{ тогда } f(x) = 0, \text{ тогда } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0.$$

Пусть $1 < x < 2$, тогда $f(x) = \frac{6}{5}(x^2 - x)$, тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 0dt + \frac{6}{5} \int_1^x (t^2 - t)dt = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_1^x = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{5} (2x^3 - 3x^2 + 1). \end{aligned}$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Пусть $x > 2$, тогда $f(x) = 0$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 0dt + \frac{6}{5} \int_1^2 (t^2 - t) dt + \int_2^x 0dt = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}8 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 1..$$

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{5}(2x^3 - 3x^2 + 1), & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $(0,5;1,5)$:

$$P(0,5 < X < 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{1}{5}(2 \cdot 1,5^3 - 3 \cdot 1,5^2 + 1) - 0 = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Задача 3. НСВ X задана интегральной функцией: $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате $N=3$ испытаний X примет значение в интервале $(a,b)=(-1, 1)$.

Решение. Вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале (a,b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 1) &= F(1) - F(-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{-1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{-1}{2} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда вероятность того, что в результате 3 испытаний X все разы примет значение в интервале $(-1, 1)$, равна

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Задача 4. Случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньше 2, б) меньше 3, в) не меньше 3, г) не меньше 5.

Решение. Вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

а) меньше 2.

$$P(-\infty < X < 2) = F(2) - F(-\infty) = 0 - 0 = 0$$

б) меньше 3.

$$P(-\infty < X < 3) = F(3) - F(-\infty) = \frac{1}{2}3 - 1 - 0 = \frac{1}{2} = 0,5$$

в) не меньше 3.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(-\infty < X < 3) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

г) не меньше 5.

$$P(X \geq 5) = P(5 < X < \infty) = F(\infty) - F(5) = 1 - 1 = 0.$$

Задача 5. Дана интегральная функция НСВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin(2x), & 0 < x \leq \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию и вероятность попадания СВ на интервал $(a, b) = (\pi/16, \pi/8)$ для данной F(x).

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решение. Найдем плотность вероятности $f(x)$ по определению:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2 \cos 2x, & 0 < x \leq \pi/4, \\ 0, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания СВ на интервал $(a, b) = (\pi/16, \pi/8)$. . Вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Получаем:

$$P\left(\frac{\pi}{16} < X < \frac{\pi}{8}\right) = F\left(\frac{\pi}{8}\right) - F\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{8} = 0,324.$$

Задача 6. Найти $M(x)$ числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено $N=50$ билетов, причем вероятность выигрыша равна $p=0,01$.

Решение. Математическое ожидание для биномиального распределения равно:

$$M(X) = np = 50 \cdot 0,01 = 0,5.$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Задача 7. НСВ задана дифференциальной функцией: $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$ в интервале $(-c; c)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность попадания СВ X в интервал $(a, b) = (-c/4, c/4)$ и функцию распределения $F(x)$.

Решение. Плотность распределения вероятностей случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq c, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < c. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Получаем:

Пусть $x \leq -c$, тогда $f(x) = 0$, тогда $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.

Пусть $-c < x \leq c$, тогда $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$, тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-c} 0dt + \int_{-c}^x \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \arcsin(t/c) \Big|_{-c}^x = \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin(x/c) - \frac{1}{\pi} \arcsin(-c/c) = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пусть $x > c$, тогда $f(x) = 0$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-c} 0dt + \int_{-c}^c \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - t^2}} dt + \int_c^x 0dt = \frac{1}{\pi} \arcsin(t/c) \Big|_{-c}^c = 1.$$

Таким образом,

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\infty < x \leq c, \\ \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}, & \text{при } -c < x \leq c, \\ 1, & \text{при } c < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания СВ X в интервал $(a, b) = (-c/4, c/4)$. Получаем:

$$\begin{aligned} P\{-c/4 < X < c/4\} &= F(c/4) - F(-c/4) = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{c}{4c}\right) + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} \arcsin\left(-\frac{c}{4c}\right) + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,161. \end{aligned}$$

Задача 8. НСВ X распределена нормально с математическим ожиданием $m=20$. Вероятность попадания СВ X в интервал $(a; b)=(20, 40)$ равна $p=0,3$. Чему равна вероятность попадания НСВ X в интервал $(c; d)=(0, 20)$?

Решение. Так как величина X распределена нормально, а интервалы имеют одинаковую длину и расположены симметрично относительно математического ожидания $m = 20$, то вероятность

$$P(0 < X < 20) = P(20 < X < 40) = 0,3.$$

Задача 9. Случайные величины X и Y заданы законами распределений. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y . Составить законы распределений случайных величин $Z = X+Y$, $V=XY$. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W=2X-4Y$.

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

X	-5	-4	-3
P	p	0,1	0,4

Y	3	10	7
P	q	0,1	0,4

Решение. Найдем неизвестные вероятности из условия, что сумма вероятностей должна быть равна 1:

$$p = 1 - 0,1 - 0,4 = 0,5;$$

$$q = 1 - 0,1 - 0,4 = 0,5.$$

Определим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y .

$$M(X) = \sum x_i \cdot p_i = -4,1$$

$$D(X) = \sum x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = 17,7 - (-4,1)^2 = 0,89.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,943$$

Расчеты в таблице:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

x_i	-5	-4	-3	Сумма
p_i	0,5	0,1	0,4	1
$x_i p_i$	-2,5	-0,4	-1,2	-4,1
$x_i^2 p_i$	12,5	1,6	3,6	17,7

$$M(Y) = \sum y_i \cdot p_i = 5,3$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 \cdot p_i - (M(Y))^2 = 34,1 - 5,3^2 = 6,01.$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2,452$$

Расчеты в таблице:

y_i	3	10	7	Сумма
p_i	0,5	0,1	0,4	1
$y_i p_i$	1,5	1	2,8	5,3
$y_i^2 p_i$	4,5	10	19,6	34,1

Составим законы распределений случайных величин $Z = X+Y$, $V=XY$.

Составим вспомогательные таблицы:

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

1) Сумма значений

$x + y$	3	10	7
-5	-2	5	2
-4	-1	6	3
-3	0	7	4

2) произведение значений

$x \cdot y$	3	10	7
-5	-15	-50	-35
-4	-12	-40	-28
-3	-9	-30	-21

3) вероятности

$P_x \cdot P_y$	0,5	0,1	0,4
0,5	0,25	0,05	0,2
0,1	0,05	0,01	0,04
0,4	0,2	0,04	0,16

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

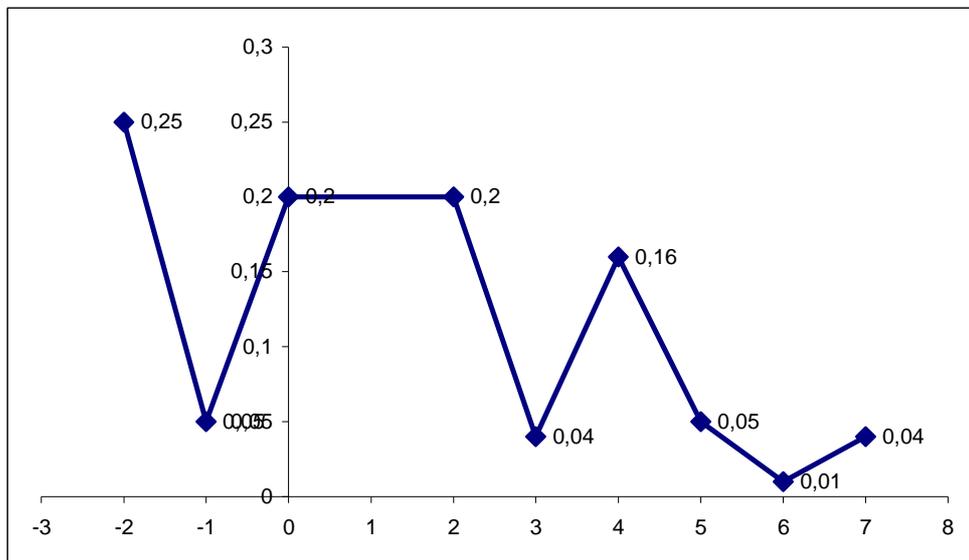
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

По данным таблицам выписываем законы распределений случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$.

Z	-2	-1	0	2	3	4	5	6	7
P	0,25	0,05	0,2	0,2	0,04	0,16	0,05	0,01	0,04

V	-50	-40	-35	-30	-28	-21	-15	-12	-9
P	0,05	0,01	0,2	0,04	0,04	0,16	0,25	0,05	0,2

Построим многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z .



Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W=2X-4Y$.

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$M(W) = M(2X - 4Y) = 2M(X) - 4M(Y) = 2 \cdot (-4,1) - 4 \cdot 5,3 = -29,4.$$

$$D(W) = D(2X - 4Y) = 2^2 D(X) + (-4)^2 D(Y) = 4 \cdot 0,89 + 16 \cdot 6,01 = 99,72.$$

Задача 10. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-1)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти:

- а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a,b)=(2,5, 3)$;
- б) дифференциальную функцию (функцию плотности вероятностей) $f(x)$;
- в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X ;
- г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

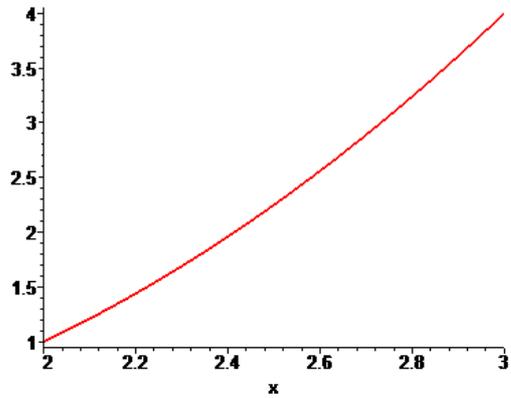
Построим график функции распределения:

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Она принимает значения от 1 до 4 на интервале $(2,3)$, тогда как по определению должна принимать значения от 0 до 1. Функция задана некорректно, решение невозможно.