МИРЭА. Типовой расчет по алгебре и геометрии

Вариант 17

Задача 1. Для пирамиды с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 найти:

А) длину ребра A_1A_2;

Б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

В) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

Г) площадь грани $A_1A_2A_3$;

Д) угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

Е) уравнение высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

Ж) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

$A_1(4,3,2)$, $A_2(1,6,2)$, $A_3(0,3,6)$, $A_4(-2,2,3)$.

Решение. Везде далее при решении считаем, что точка A_i имеет координаты (x_i, y_i, z_i)

А) Найдем длину ребра A_1A_2 по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(1-4)^2+(6-3)^2+(2-2)^2} = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Б) Угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 равен углу между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$. Найдем координаты этих векторов:

$\overline{A_1A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{1-4, 6-3, 2-2\} = \{-3, 3, 0\}$.

$\overline{A_1A_4} = \{x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\} = \{-2-4, 2-3, 3-2\} = \{-6, -1, 1\}$.

Тогда угол α определим из соотношения

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right|} = \frac{-3\cdot(-6) + 3\cdot(-1) + 0\cdot 1}{\sqrt{9+9}\sqrt{36+1+1}} = \frac{18-3}{3\sqrt{2}\sqrt{38}} = \frac{5}{\sqrt{38}\sqrt{2}}$$

Тогда $\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{38}\sqrt{2}}\right) \approx 0,96\ рад \approx 55^0$.

В) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ найдем из соотношения:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-2 \\ 1-4 & 6-3 & 2-2 \\ 0-4 & 3-3 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-4)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 12(x-4) + 12(y-3) + 12(z-2) = 12x + 12y + 12z - 108 = 0$$

Или $x + y + z - 9 = 0$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ $x + y + z - 9 = 0$, нормаль к плоскости $\overline{n} = \{1, 1, 1\}$.

Г) Найдем векторное произведение $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}$.

Вектор $\overline{A_1A_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{0-4, 3-3, 6-2\} = \{-4, 0, 4\}$.

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12\bar{i} + 12\bar{j} + 12\bar{k} = \{12, 12, 12\}$$

Тогда площадь грани $A_1A_2A_3$ равна

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = 6\sqrt{3}..$$

Д) Угол β между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ найдем из формулы:

$$\sin\beta = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \bar{n}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| \cdot |\bar{n}|} = \frac{-6 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{36+1+1}\sqrt{1+1+1}} = \frac{-6}{\sqrt{38}\sqrt{3}}$$

откуда $\beta = \arcsin\left(\frac{-6}{\sqrt{38}\sqrt{3}}\right) \approx -0,597\ рад \approx -34^0$.

Е) Так как высота A_4H перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, в качестве ее направляющего вектора можно выбрать вектор нормали $\bar{n}$. Так как прямая проходит через точку A_4, ее канонические уравнения принимают вид:

$$\frac{x - x_4}{n_1} = \frac{y - y_4}{n_2} = \frac{z - z_4}{n_3} \text{ или } \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

Ж) Найдем смешанное произведение

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 60 = -72.$$

Тогда объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}\right| = \frac{72}{6} = 12$$

Задача 2. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

А) методом Гаусса,

Б) с помощью формул Крамера,

В) записать систему в матричной форме и найти ее решение с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 4, \\ 3x + y + z = 6, \\ 3x - 5y - 6z = 5. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом Гаусса. Вычитаем из второго уравнения первое, умноженное на 3. Вычитаем из третьего уравнения первое, умноженное на 3.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 4, \\ 13y + 7z = -6, \\ 7y = -7. \end{cases}$$

Находим из последнего уравнения $y = -1$ и подставляем в остальные:

$$\begin{cases} x+4-2z=4, \\ -13+7z=-6, \\ y=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2z=0, \\ 7z=7, \\ y=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ z=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

Получили решение: $x=2,\ y=-1,\ z=1$.

Решим систему с помощью формул Крамера. Вычислим основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$=1(-6+5)+4(-18-3)-2(-15-3)=-1-84+36=-49\neq 0.$$

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$=4(-6+5)+4(-36-5)-2(-30-5)=-4-164+70=-98.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 1(-36-5) - 4(-18-3) - 2(15-18) = -41+84+6 = 49.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= 1(5+30) + 4(15-18) + 4(-15-3) = 35-12-72 = -49.$$

Тогда решение по формулам Крамера равно:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-98}{-49} = 2,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{49}{-49} = -1,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-49}{-49} = 1.$$

Получили решение: $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$.

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид: $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

Определитель был вычислен в предыдущем пункте, $|A| = -49 \neq 0$.

Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 21 & -18 \\ -14 & 0 & -7 \\ -2 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -1 & 21 & -18 \\ -14 & 0 & -7 \\ -2 & -7 & 13 \end{pmatrix}^T=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -2 \\ 21 & 0 & -7 \\ -18 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -2 \\ 21 & 0 & -7 \\ -18 & -7 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -1\cdot 4-14\cdot 6-2\cdot 5 \\ 21\cdot 4+0\cdot 6-7\cdot 5 \\ -18\cdot 4-7\cdot 6+13\cdot 5 \end{pmatrix}=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -4-84-10 \\ 84-35 \\ -72-42+65 \end{pmatrix}=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -98 \\ 49 \\ -49 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x=2,\ y=-1,\ z=1$.

Задача 3. Найти все комплексные корни заданного уравнения. Отметить найденные корни на комплексной плоскости.

$$z^4+\sqrt{2}z^2+1=0.$$

Решение. Решим данное биквадратное уравнение. Сделаем замену $z^2 = t$ и получим:

$$t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0,$$
$$D = 2 - 4 \cdot 1 = -2,$$
$$t_1 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$t_2 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Получаем еще два квадратных уравнения:

$$z^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$z^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решаем каждое из них, находя корни по формуле Муавра-Лапласа.

А) $z^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Обозначим $w = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем представление этого комплексного числа в тригонометрической форме.

Модуль $|w| = \sqrt{1/2 + 1/2} = 1$, то есть $w = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Аргумент $\varphi: \begin{cases} \cos\varphi = -1/\sqrt{2}, \\ \sin\varphi = 1/\sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow \varphi = 3\pi/4$.

Получаем, что $w = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Найдем корни $z_{0,1} = \sqrt{w}$:

$$z_0 = \sqrt{1}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) \approx 0,38 + 0,92i,$$

$$z_1 = \sqrt{1}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi/4+2\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right) \approx -0,38-0,92i$$

Б) $z^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Обозначим $w = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем представление этого комплексного числа в тригонометрической форме.

Модуль $|w| = \sqrt{1/2+1/2} = 1$, то есть $w = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Аргумент $\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = -1/\sqrt{2}, \\ \sin\varphi = -1/\sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow \varphi = -3\pi/4$.

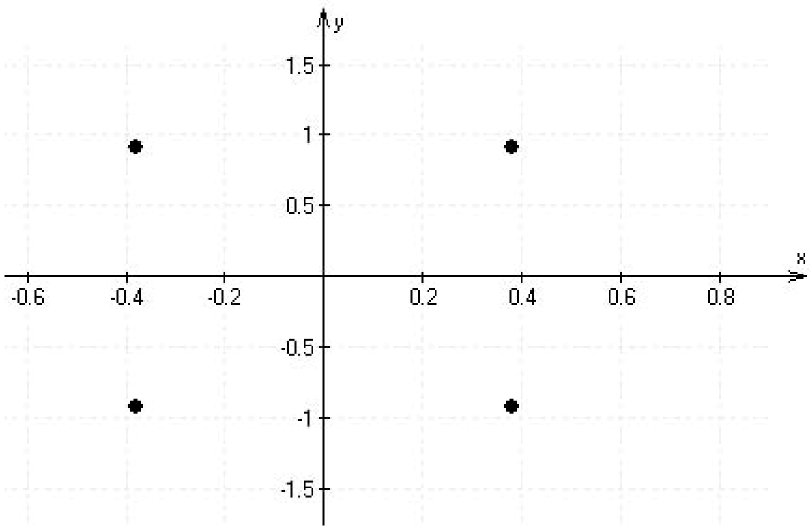
Получаем, что $w = \left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$.

Найдем корни $z_{2,3} = \sqrt{w}$:

$$z_2 = \left(\cos\frac{-3\pi}{8} + i\sin\frac{-3\pi}{8}\right) \approx 0,38-0,92i\ ,$$

$$z_3 = \left(\cos\frac{-3\pi/4+2\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi/4+2\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right) \approx -0,38+0,92i$$

Корни найдены. Строим их на плоскости:



Задача 4. Решить матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Вычисляем определитель:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-5) \cdot 8 = 4 + 40 = 44 \neq 0$ (так как определитель не равен нулю, обратная матрица существует).

Записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решаем уравнения.

1) $AX = B$. Решение

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 14+16 & -12-24 \\ 35-4 & -30+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 30 & -36 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}.$$

2) $YA = B$. Решение

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{44}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 14-30 & -56-12 \\ -4+15 & 16+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -16 & -68 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, действующего в двумерном пространстве, если известна его матрица A в некотором базисе $\{e_1, e_2\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения, решив характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

Откуда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$ - собственные значения.

Найдем соответствующие им собственные вектора.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Получаем систему:

$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$ $x = -y$, поэтому собственный вектор $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\lambda_2 = 4$. Получаем систему:

$\begin{cases} -2x + y = 0, \\ 2x - y = 0, \end{cases}$ $y = 2x$, поэтому собственный вектор $X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.