МЭСИ. Высшая математика

Контрольная работа № 4

154. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 + 2x - 2y .$$

Решение:

Перенесем $-2y$ в левую часть уравнения:

$$y' + 2y = x^2 + 2x .$$

Умножим обе части полученного уравнения на множитель $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$:

$$y'e^{2x} + 2ye^{2x} = \left(x^2 + 2x\right)e^{2x} .$$

Левая часть теперь представляет собой производную по x от произведения $y\mu(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(y\mu(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right) = y'e^{2x} + 2ye^{2x} .$$

Значит, можно записать

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right)=\left(x^2+2x\right)e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad d\left(ye^{2x}\right)=\left(x^2+2x\right)e^{2x}dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int d\left(ye^{2x}\right)=\int\left(x^2+2x\right)e^{2x}dx \quad \Leftrightarrow \quad ye^{2x}=\int\left(x^2+2x\right)e^{2x}dx\,.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int\left(x^2+2x\right)e^{2x}dx=\left\{\begin{aligned}&\textit{по частям}\\&u=x^2+2x,\ dv=e^{2x}dx,\\&du=(2x+2)dx,\ \ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}\right\}=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)e^{2x}+\int(x+1)e^{2x}dx=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&\textit{по частям}\\&t=x+1,\ dk=e^{2x}dx,\\&dt=dx,\quad k=\frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}\right\}=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)e^{2x}+\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+3x+1\right)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C\,, \quad C - \text{константа.}$$

Таким образом,

$$ye^{2x}=\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C \quad y(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{1}{2}\right)+Ce^{-2x}\,.$$

Ответ: $y(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{1}{2}\right)+Ce^{-2x}$.

164. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$:

$$y''+y=\cos 3x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Решение:

Найдем для начала общее решение заданного уравнения. Ищем его в виде суммы:

$$y(x)=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x), \qquad (1)$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения

$$y''+y=0, \qquad (2)$$

$\tilde{y}(x)$ – одно из частных решений исходного неоднородного уравнения.

Решим уравнение (1). Найдем корни характеристического многочлена

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

Следовательно, общее решение (1)

$$\bar{y}(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение $\tilde{y}(x)$, исходя из вида функции $f(x) = \cos 3x$, ищем в виде:

$$\tilde{y}(x) = a\sin 3x + b\cos 3x.$$

Находим производные:

$$\tilde{y}'(x) = 3a\cos 3x - 3b\sin 3x,$$

$$\tilde{y}''(x) = -9a\sin 3x - 9b\cos 3x.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$-9a\sin 3x - 9b\cos 3x + a\sin 3x + b\cos 3x = \cos 3x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8a = 0 \\ -8b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Значит,

$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{8}\cos 3x.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения, исходя из (1):

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{8}\cos 3x.$$

Константы C_1 и C_2 находим из начальных условий. Найдем производную:

$$y'(x) = -C_2 e^{-x} + \frac{3}{8}\sin 3x.$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 4,$$
$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{8} = 1.$$

$$-\frac{C_2}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{11}{8} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{11e^{\frac{\pi}{2}}}{8},$$

$$C_1 + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 - \frac{11}{8} = 4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{43}{8}.$$

Ответ: $y(x)=\frac{43}{8}-\frac{11}{8}e^{\frac{\pi}{2}-x}-\frac{1}{8}\cos 3x$.

174. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{n+1}.$$

Решение:

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}\left|x^{2n+2}\right|}{n+2}\cdot\frac{n+1}{2^n\left|x^{2n}\right|}\right]=2\left|x^2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=2x^2\cdot 1=2x^2.$$

По признаку Даламбера ряд буде сходиться, если $q<1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

И расходится, если $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$.

Дополнительно исследуем, если $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(а) при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда наш ряд примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Это расходящийся гармонический ряд.

(б) при $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ряд примет также вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Ответ: ряд сходится на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

и расходится на $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$.

184. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно интегрируя этот ряд:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

Решение:

Запишем разложение в ряд Маклорена для экспоненты:

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}=1+z+\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{6}+\ldots \qquad (1)$$

Положим в (1) $z=-x^{2}$:

$$e^{-x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^{2}\right)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{2n}=1-x^{2}+\frac{x^{4}}{2}-\frac{x^{6}}{6}+\ldots \qquad (2)$$

Интегрируем почленно ряд (2):

$$\int_{0}^{1}e^{-x^{2}}dx=\int_{0}^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{2n}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{1}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{2n}dx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\cdot\left(\int_{0}^{1}x^{2n}dx\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\cdot\left(\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_{0}^{1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\cdot(2n+1)}. \qquad (3)$$

Так как при $n=5$ $\frac{1}{n!(2n+1)}=\frac{1}{120\cdot 11}=\frac{1}{1320}<0.001$, то вычислим первые 6 членов разложения (3):

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \sum_{n=0}^{5}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(2n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{24\cdot 9} - \frac{1}{120\cdot 11} =$$

$$= \frac{83160 - 27720 + 8316 - 1980 + 385 - 63}{120\cdot 11\cdot 9\cdot 7} = \frac{62098}{83160} \approx 0.7467\,.$$

Ответ: $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0.7467$.