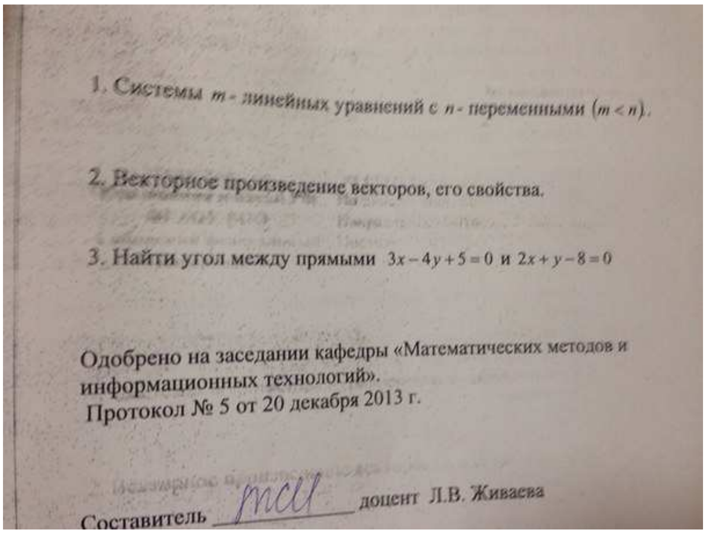
Билет


1. Системы m - линейных уравнений с n - переменными ($m < n$).

2. Векторное произведение векторов, его свойства.

3. Найти угол между прямыми $3x - 4y + 5 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$

Одобрено на заседании кафедры «Математических методов и информационных технологий».
Протокол № 5 от 20 декабря 2013 г.

Составитель ____ доцент Л.В. Живаева

Ответы и решения

1. Системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$).

Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Назовем матрицей системы матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных. Матрицу, полученную из A добавлением столбца свободных членов, называют расширенной матрицей:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Всегда выполняется $r(\overline{A}) \geq r(A)$, так как каждый минор матрицы A будет и минором матрицы $\overline{A}$, но не наоборот.

Теорема Кронекера–Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений). Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(\overline{A})$.

Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если же ранг меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений. Так как по условию $m < n$, такие системы **имеют множество решений**.

Практически для решения таких систем применяют **метод Гаусса**, состоящий в последовательном исключении неизвестных - над строками расширенной матрицы системы производят элементарные преобразования, приводя ее к виду, когда ниже главной диагонали, содержащей элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$, будут располагаться нули. Разрешается:

1) изменять порядок строк матрицы, что соответствует изменению порядка уравнений;
2) умножать строки на любые отличные от нуля числа, что соответствует умножению соответствующих уравнений на эти числа;
3) прибавлять к любой строке матрицы другую, умноженную на отличное от нуля число, что соответствует прибавлению к одному уравнению системы другого, умноженного на число.

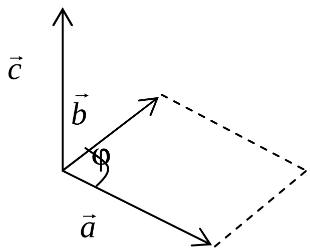
С помощью этих преобразований каждый раз получается расширенная матрица новой системы, равносильной исходной, т. е. такой системы, решение которой совпадает с решением исходной системы.

2. Векторное произведение векторов, его свойства.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$
3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (см. рисунок ниже).

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;
3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a}\times(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 3. Найти угол между прямыми $3x-4y+5=0$ и $2x+y-8=0$.

Решение. В случае задания прямых общими уравнениями (как в данной задаче) угол α между прямыми можно искать по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} .$$

Подставляем:

$$\cos\alpha = \frac{3\cdot 2+(-4)\cdot 1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6-4}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}},$$

Значит, $\alpha = \arccos\frac{2}{5\sqrt{5}} \approx 80^0$