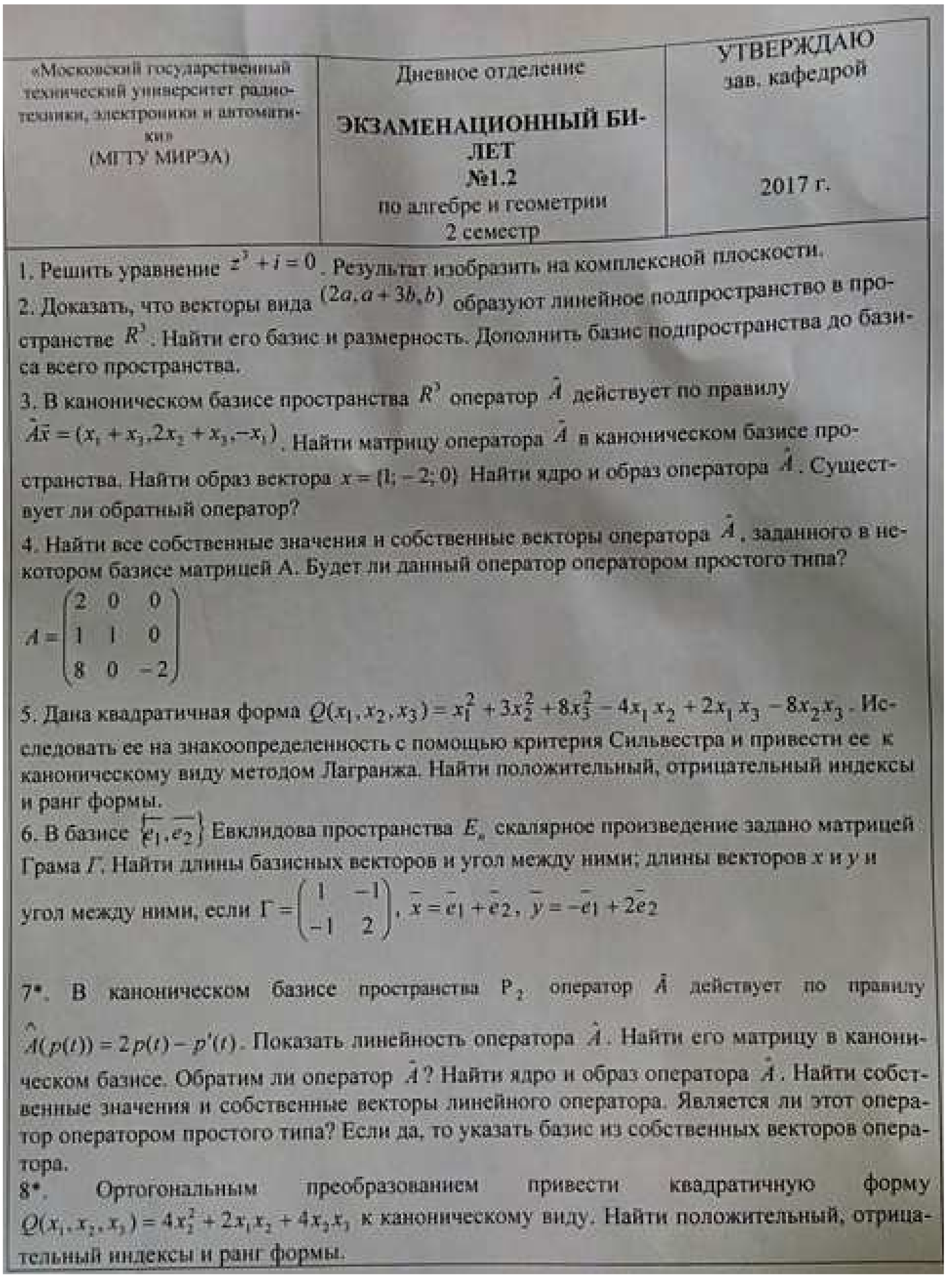
Работа выполнена авторами www.MatBuro.ru
Помощь онлайн по высшей математике
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Рукописное решение при сдаче экзамена по алгебре и геометрии (МГТУ МИРЭА) (комплексные числа, линейные пространства, операторы, квадратичные формы, векторы, многочлены).

Билет



«Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики» (МГТУ МИРЭА)	Дневное отделение **ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1.2** по алгебре и геометрии 2 семестр	УТВЕРЖДАЮ зав. кафедрой 2017 г.

1. Решить уравнение $z^3 + i = 0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

2. Доказать, что векторы вида $(2a, a+3b, b)$ образуют линейное подпространство в пространстве R^3. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

3. В каноническом базисе пространства R^3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}\bar{x} = (x_1 + x_3, 2x_2 + x_3, -x_1)$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства. Найти образ вектора $x = (1; -2; 0)$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор?

4. Найти все собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей А. Будет ли данный оператор оператором простого типа?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Дана квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$. Исследовать ее на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра и привести ее к каноническому виду методом Лагранжа. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

6. В базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ Евклидова пространства E_n скалярное произведение задано матрицей Грама Γ. Найти длины базисных векторов и угол между ними; длины векторов x и y и угол между ними, если $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{y} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$

7*. В каноническом базисе пространства P_2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(p(t)) = 2p(t) - p'(t)$. Показать линейность оператора $\hat{A}$. Найти его матрицу в каноническом базисе. Обратим ли оператор $\hat{A}$? Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Является ли этот оператор оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов оператора.

8*. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ к каноническому виду. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

Ход решения

Рукописный, так как задания объемные и сложные, а срок на решение небольшой.

1) $z^3+i=0$, $z=\sqrt[3]{-i}$

$-i=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

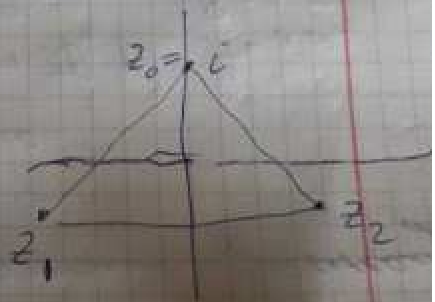
$$\sqrt[3]{-i}=\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

$\underline{k=0}$, $z_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$,

$\underline{k=1}$ $z_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$;

$\underline{k=2}$ $z_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$



2) Сумма двух векторов:

$(2a_1, a_1+3b_1, b_1) + (2a_2, a_2+3b_2, b_2) =$

$= (2a, a+3b, b)$, где $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$

То есть сумма принадлежит данному пространству.

Умножение на число:

$\alpha(2a, a+3b, b) = (2A, A+3B, B)$, $A = \alpha a$, $B = \alpha b$

Тоже принадлежит. Значит, это линейное подпространство.

Любой вектор из этого пространства можно записать в виде

$a(2,1,0) + b(0,1,1)$. Значит $(2,1,0)$ и $(0,1,1)$ – базис этого пространства.

Для получения всего базиса R^3 можно добавить, например, вектор $(0,0,1)$, т.к.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Базис R^3: $(2,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$

3) $\hat{A}x = (x_1 + x_3,\ 2x_2 + x_3,\ -x_1) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

матрица A

Образ вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ядро: $\hat{A}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\ker \hat{A} = \{0\}$. Так как ядро нулевое, то образом будет всё пространство, $\mathrm{Im}\,\hat{A} = R^3$.

Обратный оператор существует, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

4) Собственные значения:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0.$$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2.$

Найдем собственные векторы, решая систему

$(A-\lambda E)X=0$

$\underline{\lambda=2}$

$$\begin{cases} 0=0 \\ \alpha-\beta=0 \\ 8\alpha-4\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta=\alpha \\ \gamma=2\alpha. \end{matrix}$$ Здесь α - любое

можно взять, напр, $\alpha=1$, получим

Собств. вектор $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{\lambda=1}$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha=0 \\ 8\alpha-2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha=\gamma=0 \\ \beta \text{ - любое},\ \beta=1, \end{matrix}$$

$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$

$\lambda = -2$ $\quad \begin{cases} 4\alpha = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ 8\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, γ − любое, $\gamma = 1$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Так как Кол-во собственных векторов $= 3 =$ размерности пространства, то A − оператор простого типа.

5) Матрица формы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры: $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 < 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 8 + 8 - 3 - 32 - 16 = -11 < 0.$$

Форма не является знакоопределенной.

Если знаки миноров $+ + +$ − то положительно определена. Если $- + -$, то отриц. опр. В других случаях не определена.

$$Q = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

присутствует x_1

половина коэффициента

Заменим
$$\begin{cases} y_1 = 1x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

коэф. при x_1^2

при раскрытии получатся перекрестные члены

$$Q = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 - 4x_2^2 - x_3^2 + 3x_2^2 +$$
$$+ 8x_3^2 - 8x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2 - 4y_2y_3 + 7y_3^2$$

Далее
$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$
$$Q = y_1^2 - (y_2 + 2y_3)^2 + 4y_3^2 + 7y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 + 11z_3^2.$$

Это канонический вид.

Положительный индекс инерции -2 (два положит. слагаемых), отриц. индекс $= 1$, т.к. присутствуют 3 переменных z_1, z_2, z_3, то ранг $= 3$.

б) Из матрицы видно, что

$(e_1, e_1) = 1, \quad (e_1, e_2) = -1, \quad (e_2, e_2) = 2$

Значит $|e_1| = 1, \; |e_2| = \sqrt{2}$,

$\cos\alpha = \dfrac{(e_1, e_2)}{|e_1||e_2|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \dfrac{3\pi}{4}.$

$(x, x) = (e_1 + e_2, e_1 + e_2) = (e_1, e_1) + 2(e_1, e_2) + (e_2, e_2) =$

$= 1 - 2 + 2 = 1, \quad |x| = 1,$

$(y, y) = (-e_1 + 2e_2, -e_1 + 2e_2) = (e_1, e_1) - 4(e_1, e_2) +$

$+ (e_2, e_2) = 1 + 4 + 2 = 7; \quad |y| = \sqrt{7};$

$(x, y) = (e_1 + e_2, -e_1 + 2e_2) = -(e_1, e_1) + (e_1, e_2) +$

$+ 2(e_2, e_2) = -1 - 1 + 4 = 2.$

$\cos\beta = \dfrac{(x, y)}{|x||y|} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}, \quad \beta = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}.$

7) Имеем: $\hat{A}(\alpha p_1+\beta p_2) = 2(\alpha p_1+\beta p_2) - (\alpha p_1+\beta p_2)' =$
$= \alpha(2p_1 - p_1') + \beta(2p_2 - p_2') = \alpha\hat{A}(p_1) +$
$+ \beta\hat{A}(p_2)$, оператор линеен.

Имеем канонический базис $\{1, t, t^2\}$,

$\hat{A}(1) = 2$, $\hat{A}(t) = 2t - 1$, $\hat{A}(t^2) = 2t^2 - 2t$,

матрица $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$. Определитель матрицы $= 8 \neq 0$ – оператор обратим.

Ядро.

$A(at^2+bt+c) = 2(at^2+bt+c) - (2at+b) =$
$= 2at^2 + (2b-2a)t + (2c-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases}2a = 0\\ 2b - 2a = 0\\ 2c - b = 0,\end{cases}$

$a = b = c = 0$. $\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{0\}$. Образом будет всё пространство.

Собств. числа:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0,$$

$\lambda = 2$

Собств. вектора $(A - \lambda E)x = 0$,

$\begin{cases}0 = 0\\ -\alpha = 0\\ -2\beta = 0\end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, γ – любое, $\gamma = 1$, собств. вектор $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Так как собств. вектор 1, а размерность пространства $= 3$, то он не является оператором простого типа.

8) Матрица форм.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ собств. числа}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(4-\lambda) + [illegible] \lambda + 4\lambda) =$$

$$\cancel{= 4\lambda^2 - \lambda^3 + 5\lambda \ldots = 0,}$$

$$5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

~~Подбираем λ = ...~~ $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0.$

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 5.$$

Собств. вектора:

$\underline{\lambda = 0}$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 0 \\ \alpha = -2\gamma \end{matrix} \qquad \gamma = 1$$

Собств. вектор $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, нормированный

собств. вектор $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, поделим на длину $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

$\lambda=-1$ $\quad \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+5\beta+2\gamma=0 \\ 2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma=-2\beta,\ \alpha=-\beta$

β возьмем $=-1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, нормированный вектор

$$\bar{e}_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\lambda=5$ $\quad \begin{cases} -5\alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta+2\gamma=0 \\ 2\beta-5\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta=5\alpha,\ \gamma=2\alpha,\ \alpha=1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, нормированный вектор

$$\bar{e}_3=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Записывая векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в столбцы, получим матрицу преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{30}}y_3 \\ x_2 = \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{30}}y_3 \end{cases}$$

положительный и отрицательный индексы = 1, ранг = 2, т.к. осталось 2 переменных y_2 и y_3

Первоначально у нас матрица формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, после преобразования

$$A_1 = S^T A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

Канонический вид формы $-y_2^2 + 5y_3^2$