Билет

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ММ и ИТ
________________ /А.В.Степанов/
14 января 2015 г.

МГИМО(У) МИД РОССИИ
Факультет МЭО
Вариант
к экзамену по дисциплине
«Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Фирма организовала серию из трех аукционов *по продаже объектов* незавершенного строительства. Вероятности того, что на каждом из этих аукционах удастся реализовать все лоты, равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5. Чему равна вероятность того, что только на двух аукционах удастся реализовать *все лоты*?

2. Случайная величина η задана следующей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-5,\\ 0{,}1, & -5\le x<-3,\\ 0{,}3, & -3\le x<1,\\ 0{,}7, & 1\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины η?

3. Случайная величина ν имеет следующую функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ ax+b, & -3\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины ν?

4. По двумерной выборке (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) вычислены выборочные средние $\overline{x}=3$, $\overline{y}=2$, $\overline{xy}=-4{,}5$. Чему равна выборочная ковариация ?

5. Найти с надежностью 0,925 доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения ξ с дисперсией $D\xi=9$, если выборочная средняя, подсчитанная по выборке объемом 144, равна 14.

А. Какое распределение имеет статистика, используемая для построения указанной интервальной оценки? Указать название и параметры распределения.

Б. Записать уравнение для t_γ.

В. Записать найденный доверительный интервал.

6. Двумерная случайная величина (ξ,η) определяется следующей плотностью распределения:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}xy-y+C, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где D – квадрат: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$.

А. Чему равен параметр C?

Б. Найти плотность распределения случайной величины η.

В. Записать условную плотность распределения вероятностей случайной

Решение

1. Фирма организовала серию из трех аукционов по продаже объектов незавершенного строительства. Вероятности того, что на каждом из этих аукционов удастся реализовать все лоты, равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5. Чему равна вероятность того, что только на двух аукционах удастся реализовать все лоты?

Решение. Введем независимые события:
A_i = (На i-ом аукционе удалось реализовать все лоты), $i = 1,2,3$.
Известны вероятности этих событий: $P(A_1) = 0,3$, $P(A_2) = 0,4$, $P(A_3) = 0,5$.

Введем событие Y = (Только на 2 аукционах из трех удалось реализовать все лоты). Его можно выразить следующим образом: $Y = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$. Вероятность равна:

$$P(Y) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,29.$$

Ответ: 0,29

2. Случайная величина η задана следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -5, \\ 0{,}1, & -5 \le x < -3, \\ 0{,}3, & -3 \le x < 1, \\ 0{,}7, & 1 \le x < 4, \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины η?

Решение. По виду функции распределения $F(x) = P(X < x)$ можно восстановить закон распределения.

x_i	-5	-3	1	4
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Тогда математическое ожидание равно $M\eta = \sum x_i p_i = -5 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 = 0,5$

Ответ 0,5

3. Случайная величина v имеет следующую функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ ax+b, & -3\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины v?

Решение. Сначала найдем параметры a,b по свойствам функции распределения:

$$\begin{cases}F(-3)=-3a+b=0;\\ F(6)=6a+b=1\end{cases}\quad \begin{cases}a=1/9,\\ b=1/3\end{cases}$$

То есть $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \frac{1}{9}x+\frac{1}{3}, & -3\le x\le 6\\ 1, & x>6.\end{cases}$

Тогда плотность распределения есть производная от этой функции:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \frac{1}{9}, & -3\le x\le 6\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Математическое ожидание

$$Mv=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\int_{-3}^{6}\frac{1}{9}xdx=\frac{1}{18}x^2\Big|_{-3}^{6}=\frac{3}{2}=1,5.$$

Ответ: 1,5

4. По двумерной выборке $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n)$ вычислены выборочные средние $\overline{x}=3$, $\overline{y}=2$, $\overline{xy}=-4,5$. Чему равна выборочная ковариация?

Решение. Выборочная ковариация есть

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}=-4,5-2\cdot 3=-4,5-6=-10,5$$

Ответ: -10,5

ные средние $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 2$, $\overline{xy} = -4,5$. Чему равна ...

5. Найти с надежностью 0,925 доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения ξ с дисперсией $D\xi = 9$, если выборочная средняя, подсчитанная по выборке объемом 144, равна 14.

А. Какое распределение имеет статистика, используемая для построения указанной интервальной оценки? Указать название и параметры распределения.

Б. Записать уравнение для t_γ.

В. Записать найденный доверительный интервал.

... (ξ, η) определяется следующей плотностью

Решение.
А) Статистика имеет нормальное распределение (так как дисперсия известна), при этом доверительная вероятность $\gamma = 0,925$.

Б) Найдем значение $t_\gamma = t_{0,925} = \Phi(\gamma/2) = \Phi(0,925/2) = \Phi(0,4625) = 1,78$ по таблице распределения функции Лапласа.

В) Найдем $\delta = \dfrac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{144}} \cdot 1,78 = 0,445$.
Тогда доверительный интервал для математического ожидания есть

$\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta,$

$14 - 0,445 < a < 14 + 0,445,$

$13,555 < a < 14,445.$

Ответ: $13,555 < a < 14,445.$

Б. Записать уравнение для t_γ.

В. Записать найденный доверительный интервал.

6. Двумерная случайная величина (ξ, η) определяется следующей плотностью распределения:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} xy - y + C, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где D – квадрат: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

А. Чему равен параметр C?

Б. Найти плотность распределения случайной величины η.

В. Записать условную плотность распределения вероятностей случайной

Решение. Найдем параметр С из условия нормировки плотности распределения: $\iint\limits_D p(x,y)dxdy=1$ (так как вне области D функция принимает нулевые значения).

Подставляем и вычисляем:

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy=\int_1^2 dx\int_0^1 (xy-y+C)\,dy=\int_1^2\left[\left(\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{2}y^2+Cy\right)\Bigg|_0^1\right]dx=$$

$$=\int_1^2\left[\frac{1}{2}x\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2+C\cdot 1\right]dx=\int_1^2\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+C\right]dx=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+Cx\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 2+C\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 1+C\cdot 1\right)\right]=\frac{1}{4}+C=1$$

Получили $C=\frac{3}{4}=0,75.$

Б) Найдем плотность распределения случайной величины η

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dx=\int_1^2\left(xy-y+\frac{3}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2y-xy+\frac{3}{4}x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2y-2y+\frac{3}{4}\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2y-1\cdot y+\frac{3}{4}\cdot 1\right)\right]=\frac{1}{2}y+\frac{3}{4},\, y\in[0,1].$$