

Билет

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой ММ и ИТ  
*А.В. Степанов*  
/А.В. Степанов/  
14 января 2015 г.

МГИМО(У) МИД РОССИИ  
Факультет МЭУ  
Вариант  
к экзамену по дисциплине  
«Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Фирма организовала серию из трех аукционов по продаже объектов незавершенного строительства. Вероятности того, что на каждом из этих аукционов удастся реализовать все лоты, равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5. Чему равна вероятность того, что только на двух аукционах удастся реализовать все лоты?

2. Случайная величина  $\eta$  задана следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -5, \\ 0,1, & -5 \leq x < -3, \\ 0,3, & -3 \leq x < 1, \\ 0,7, & 1 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины  $\eta$ ?

3. Случайная величина  $v$  имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ ax + b, & -3 \leq x \leq 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины  $v$ ?

4. По двумерной выборке  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  вычислены выборочные средние  $\bar{x} = 3, \bar{y} = 2, \overline{xy} = -4,5$ . Чему равна выборочная ковариация?

5. Найти с надежностью 0,925 доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения  $\xi$  с дисперсией  $D\xi = 9$ , если выборочная средняя, подсчитанная по выборке объемом 144, равна 14.

А. Какое распределение имеет статистика, используемая для построения указанной интервальной оценки? Указать название и параметры распределения.  
Б. Записать уравнение для  $I_\gamma$ .  
В. Записать найденный доверительный интервал.

6. Двумерная случайная величина  $(\xi, \eta)$  определяется следующей плотностью распределения:

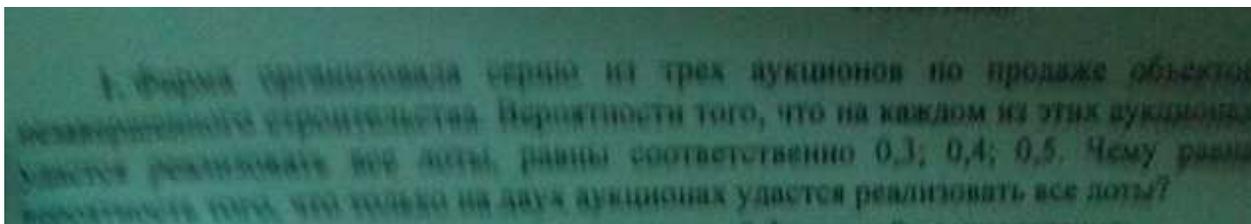
$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} xy - y + C, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где  $D$  - квадрат:  $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ .

А. Чему равен параметр  $C$ ?  
Б. Найти плотность распределения случайной величины  $\eta$ .  
В. Записать условную плотность распределения вероятностей случайной

3

### Решение



**Решение.** Введем независимые события:

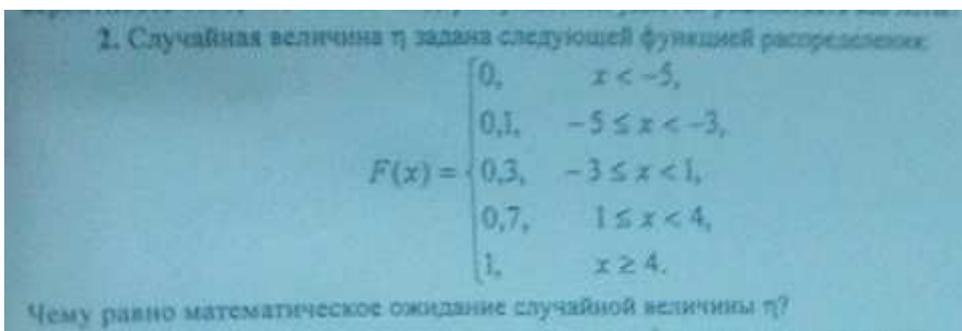
$A_i$  = (На  $i$ -ом аукционе удалось реализовать все лоты),  $i = 1, 2, 3$ .

Известны вероятности этих событий:  $P(A_1) = 0,3$ ,  $P(A_2) = 0,4$ ,  $P(A_3) = 0,5$ .

Введем событие  $Y$  = (Только на 2 аукционах из трех удалось реализовать все лоты). Его можно выразить следующим образом:  $Y = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ . Вероятность равна:

$$P(Y) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \\ = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,29.$$

**Ответ:** 0,29

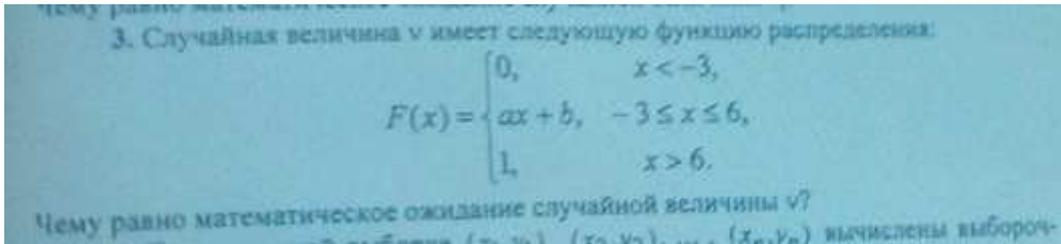


**Решение.** По виду функции распределения  $F(x) = P(X < x)$  можно восстановить закон распределения.

$x_i$	-5	-3	1	4
$P_i$	0,1	0,2	0,4	0,3

Тогда математическое ожидание равно  $M\eta = \sum x_i p_i = -5 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 = 0,5$

**Ответ** 0,5



**Решение.** Сначала найдем параметры  $a, b$  по свойствам функции распределения:

$$\begin{cases} F(-3) = -3a + b = 0; \\ F(6) = 6a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/9, \\ b = 1/3 \end{cases}$$

$$\text{То есть } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}, & -3 \leq x \leq 6 \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

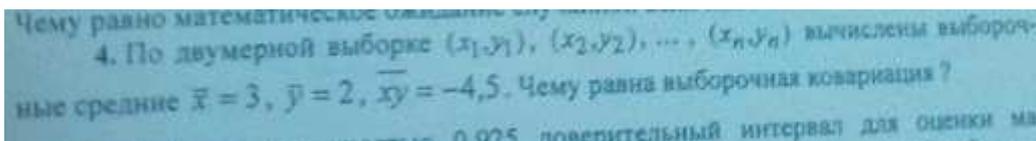
Тогда плотность распределения есть производная от этой функции:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{9}, & -3 \leq x \leq 6 \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Математическое ожидание

$$Mv = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x dx = \int_{-3}^6 \frac{1}{9} x dx = \frac{1}{18} x^2 \Big|_{-3}^6 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

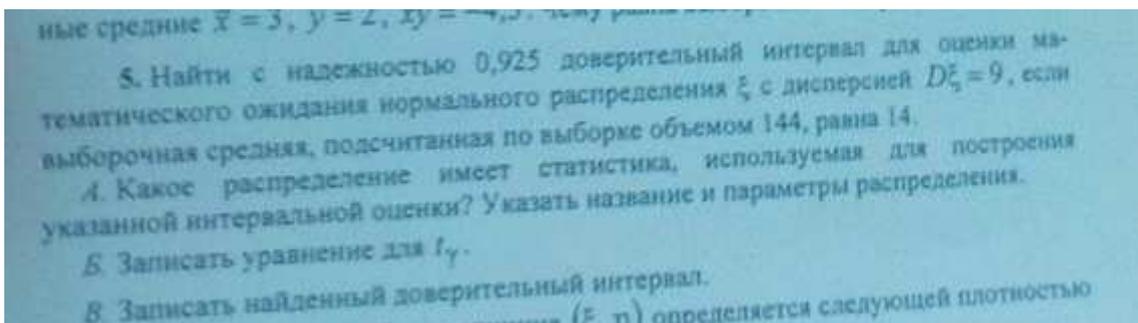
**Ответ:** 1,5



**Решение.** Выборочная ковариация есть

$$\text{cov}(X, Y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = -4,5 - 2 \cdot 3 = -4,5 - 6 = -10,5$$

**Ответ:** -10,5



**Решение.**

А) Статистика имеет нормальное распределение (так как дисперсия известна), при этом доверительная вероятность  $\gamma = 0,925$ .

Б) Найдем значение  $t_\gamma = t_{0,925} = \Phi(\gamma/2) = \Phi(0,925/2) = \Phi(0,4625) = 1,78$  по таблице распределения функции Лапласа.

В) Найдем  $\delta = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{144}} \cdot 1,78 = 0,445$ .

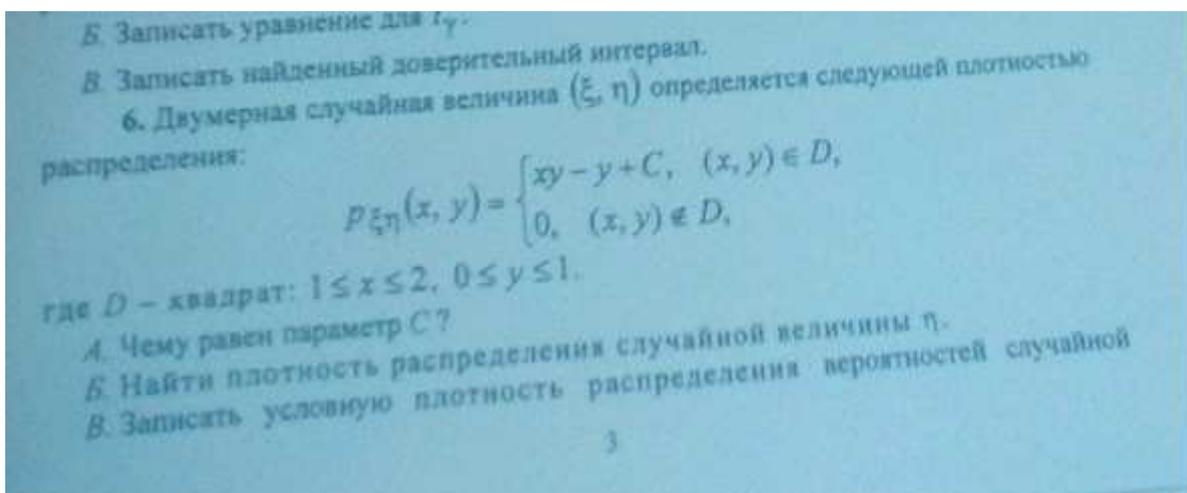
Тогда доверительный интервал для математического ожидания есть

$$\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta,$$

$$14 - 0,445 < a < 14 + 0,445,$$

$$13,555 < a < 14,445.$$

**Ответ:**  $13,555 < a < 14,445$ .



**Решение.** Найдем параметр  $C$  из условия нормировки плотности распределения:

$$\iint_D p(x, y) dx dy = 1 \text{ (так как вне области } D \text{ функция принимает нулевые значения).}$$

Подставляем и вычисляем:

$$\begin{aligned} \iint_D p_{\xi\eta}(x, y) dx dy &= \int_1^2 dx \int_0^1 (xy - y + C) dy = \int_1^2 \left[ \left( \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{2} y^2 + Cy \right) \Big|_0^1 \right] dx = \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C \cdot 1 \right] dx = \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + C \right] dx = \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + Cx \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left[ \left( \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 + C \cdot 2 \right) - \left( \frac{1}{4} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + C \cdot 1 \right) \right] = \frac{1}{4} + C = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Получили } C = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Б) Найдем плотность распределения случайной величины  $\eta$

$$\begin{aligned} p_{\eta}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) dx = \int_1^2 \left( xy - y + \frac{3}{4} \right) dx = \\ &= \left( \frac{1}{2} x^2 y - xy + \frac{3}{4} x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2^2 y - 2y + \frac{3}{4} \cdot 2 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot 1^2 y - 1 \cdot y + \frac{3}{4} \cdot 1 \right) \right] = \frac{1}{2} y + \frac{3}{4}, y \in [0, 1]. \end{aligned}$$