1. (Задача для проверки уровня обученности УМЕТЬ*)
Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов выиграют не более одного.

Решение. Используем классическое определение вероятности: $P=\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех элементарных равновозможных исходов.

$n=C_{10}^5=\frac{10!}{5!5!}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=252$ - число различных способов выбрать 5 билетов из имеющихся 10.

Выиграют не более одного, то есть или один, или ноль билетов будет с выигрышем.
$m=C_2^1\cdot C_8^4+C_2^0\cdot C_8^5=2\cdot\frac{8!}{4!4!}+1\cdot\frac{8!}{5!3!}=2\cdot\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+1\cdot\frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=196$ - число различных способов выбрать или 1 выигрышный билета (из 2) и еще 4 невыигрышных (из 10-2=8), или 0 выигрышных билетов и еще 5 невыигрышных.

Вероятность $P=\frac{m}{n}=\frac{196}{252}=\frac{7}{9}=0,778$.

Ответ: 0,778.

2. (Задача для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ*)
На некоторой фабрике 20% продукции производится первой машиной, 55%- второй, а остальная - третьей. Первая машина дает 3% брака, вторая – 5%, а третья – 8%. Случайно выбранная единица продукции оказалась стандартной. Определить вероятность того, что она изготовлена на первой машине.

Решение. Рассмотрим полную группу гипотез:
$H1$ = (Продукция изготовлена машиной 1),
$H2$ = (Продукция изготовлена машиной 2),
$H3$ = (Продукция изготовлена машиной 3).
Выпишем вероятности гипотез из условия задачи:
$P(H1)=20\%=0,2$, $P(H2)=55\%=0,55$, $P(H3)=1-0,2-0,55=0,25$.

Введем событие A = (Случайно выбранная единица продукции оказалась стандартной). Найдем условные вероятности:

$P(A|H1)=100\%-3\%=97\%=0,97$,

$P(A|H2)=100\%-5\%=95\%=0,95$,

$P(A|H3)=100\%-8\%=92\%=0,92$.

Теперь найдем вероятность того, что продукция изготовлена на первой машине, если она оказалась стандартной, по формуле Байеса:

$$P(H1|A)=\frac{P(H1)P(A|H1)}{P(A|H1)P(H1)+P(A|H2)P(H2)+P(H3)P(A|H3)}=$$

$$=\frac{0,20\cdot 0,97}{0,20\cdot 0,97+0,55\cdot 0,95+0,25\cdot 0,92}\approx 0,205.$$

Ответ: 0,205.

3. *(Вопрос для проверки уровня обученности ЗНАТЬ*)*
Игральная кость брошена три раза. Написать закон распределения числа появлений пятерки тремя способами. Построить график функции распределения.

Решение. Рассмотрим дискретную случайную величину X = (Число выпавших пятерок при трех бросаниях кости). Она может принимать значения 0,1,2,3. X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=3$, $p=1/6$. Вероятности $P(X=k)$ будем вычислять по формуле Бернулли $P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. Получаем.

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0(1/6)^0(5/6)^3=\frac{125}{216}.$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1(1/6)^1(5/6)^2=\frac{25}{72}.$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2(1/6)^2(5/6)^1=\frac{5}{72}.$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3(1/6)^3(5/6)^0=\frac{1}{216}.$$

Закон распределения X имеет вид:

X	0	1	2	3
P	125/216	25/72	5/72	1/216

Найдем функцию распределения $F(x)=P(X<x)$, то есть
при x ≤ 0, F(x) = 0,
при 0< x ≤ 1, F(x) = 0+125/216 = 125/216,

при $1 < x \le 2$, $F(x) = 125/216+25/72=25/27$,
при $2 < x \le 3$, $F(x) = 25/27+5/72=215/216$,
при $x>3$, $F(x) =215/216+1/216 = 1$.

График функции распределения: