Задача 1. Некто заполнил карточку спортивной лотереи «6 из 49». Случайная величина X – число угаданных им номеров при розыгрыше.

1) составить таблицу распределения случайной величины X;
2) построить многоугольник распределения;
3) найти функцию распределения и построить её график;
4) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X;
5) найти вероятность P(X>2).

Решение. Пусть X - дискретная случайная величина, равная количеству угаданных номеров в лотерее. Она может принимать значения от 0 до 6 (0,1,2,3,4,5,6). Найдем соответствующие вероятности, используя классическое определение вероятности: $P=\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех возможных исходов.

Для всех случаев $n=C_{49}^{6}=\frac{49!}{6!43!}=\frac{44\cdot45\cdot46\cdot47\cdot48\cdot49}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=13983816$ - число различных способов выбрать 6 чисел из 49.

$X=0$, если из 6 чисел не угадано ни одного, то есть все они выбраны из 43 неверных чисел. Поэтому $m=C_{43}^{6}=\frac{43!}{6!37!}=\frac{38\cdot39\cdot40\cdot41\cdot42\cdot43}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=6096454$, тогда

$P(X=0)=\frac{m}{n}=\frac{6096454}{13983816}\approx0,43596$.

$X=1$, если из 6 чисел одно угадано верно и 5 не угадано. Поэтому

$m=6\cdot C_{43}^{5}=\frac{43!}{6!38!}=6\frac{39\cdot40\cdot41\cdot42\cdot43}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=5775588$, тогда

$P(X=1)=\frac{m}{n}=\frac{5775588}{13983816}\approx0,41302$.

$X=2$, если из 6 чисел 2 угадано верно и 4 не угадано. Поэтому

$m=C_{6}^{2}\cdot C_{43}^{4}=\frac{6!}{2!4!}\frac{43!}{4!39!}=\frac{5\cdot6}{1\cdot2}\frac{40\cdot41\cdot42\cdot43}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1851150$, тогда

$P(X=2)=\frac{m}{n}=\frac{1851150}{13983816}\approx0,13238$.

$X=3$, если из 6 чисел 3 угадано верно и 3 не угадано. Поэтому

$m=C_{6}^{3}\cdot C_{43}^{3}=\frac{6!}{3!3!}\frac{43!}{3!40!}=\frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\frac{41\cdot42\cdot43}{1\cdot2\cdot3}=246820$, тогда

$P(X=3)=\frac{m}{n}=\frac{246820}{13983816}\approx0,01765$.

$X=4$, если из 6 чисел 4 угадано верно и 2 не угадано. Поэтому

$m=C_{6}^{4}\cdot C_{43}^{2}=\frac{6!}{4!2!}\frac{43!}{2!41!}=\frac{5\cdot6}{1\cdot2}\frac{42\cdot43}{1\cdot2}=13545$, тогда $P(X=4)=\frac{m}{n}=\frac{13545}{13983816}\approx0,00097$.

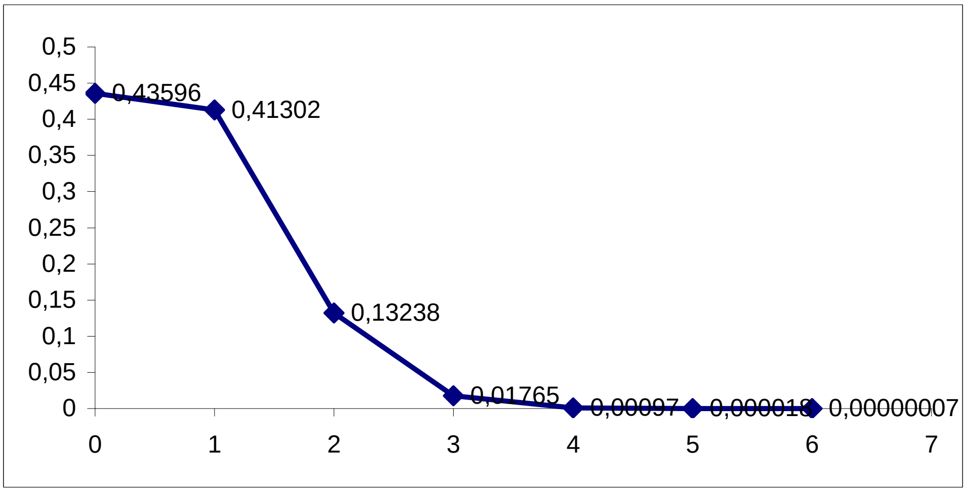
$X=5$, если из 6 чисел 5 угадано верно и 1 не угадано. Поэтому $m=C_{6}^{5}\cdot C_{43}^{1}=6\cdot43=258$, тогда $P(X=5)=\frac{m}{n}=\frac{258}{13983816}\approx0,000018$.

$X=6$, если из 6 чисел все 6 угаданы верно. Поэтому $m=C_6^6=1$, тогда
$P(X=6)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{13983816}\approx 0{,}00000007$.

Получаем ряд распределения случайной величины X:

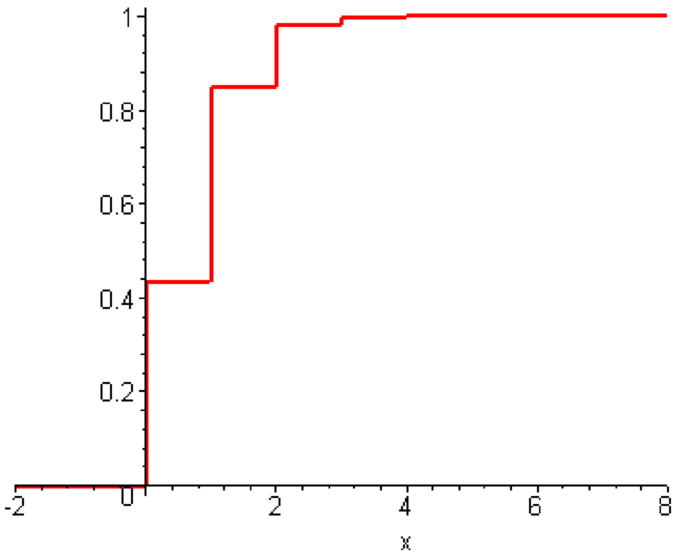
x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,43596	0,41302	0,13238	0,01765	0,00097	0,000018	0,00000007

Построим многоугольник распределения:



Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x)=P(X<x)$, то есть
при x $\le$ 0, F(x) = 0,
при 0< x $\le$ 1, F(x) = 0 +0,43596= 0,43596,
при 1< x $\le$ 2, F(x) = 0,43596+0,41302= 0,84898,
при 2< x $\le$ 3, F(x) = 0,84898 +0,13238 = 0,98136,
при 3< x $\le$ 4, F(x) = 0,98136 +0,01765 = 0,99901,
при 4< x $\le$ 5, F(x) = 0,99901 +0,00097= 0,99998,
при 5< x $\le$ 6, F(x) = 0,99998 +0,000018= 0,999998,
при x>6, F(x) =0,999998+0,00000007= 1.

Построим график функции $F(x)$:



Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Найдем математическое ожидание:
$M(x)=\sum x_i p_i \approx 0,7347$.
Найдем дисперсию:
$D(x)=\sum x_i^2 p_i-(M(x))^2 \approx 1,1174-0,7347^2 \approx 0,5776$.
Найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0,5776}\approx 0,76$.

Расчеты в таблице ниже:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	**Сумма**
p_i	0,43596	0,41302	0,13238	0,01765	0,00097	0,000018	0,00000007	**1,0000**
$x_i p_i$	0	0,41302	0,26476	0,05295	0,00388	0,00009	0,00000042	**0,7347**
$x_i^2 p_i$	0	0,41302	0,52952	0,15885	0,01552	0,00045	0,00000252	**1,1174**

Найдем вероятность P(X>2):
$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$
$=0,01765+0,00097+0,000018+0,00000007\approx 0,0186.$

Задача 2. Непрерывная случайная величина X задана с помощью функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1;\\ Ax\ln x+Bx, 1\le x\le e;\\ 1, x\ge e.\end{cases}$$

1. найти неизвестные коэффициенты;
2. построить график функции распределения;
3. найти функцию плотности вероятностей и построить её график;

4. найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X;
5. найти вероятность P(X<2).

Решение. Найдем неизвестные коэффициенты A и B. Используем свойства функции распределения: $F(1)=0$, $F(e)=1$. Подставляем:

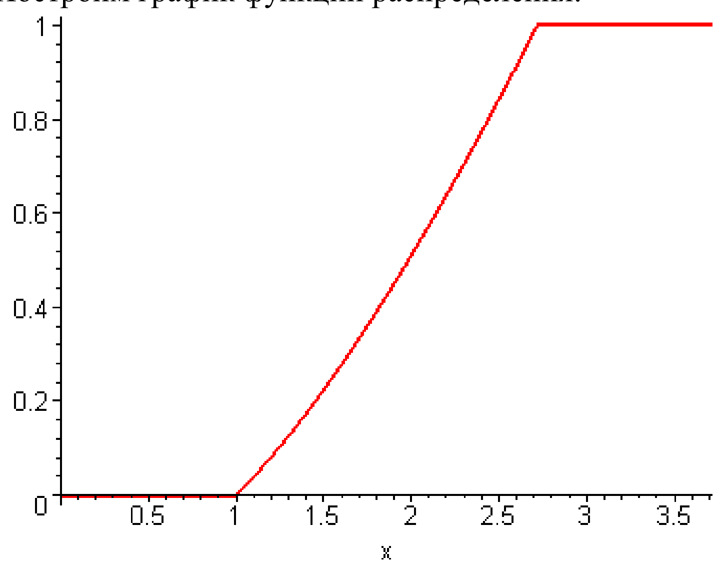
$F(1)=A\ln 1+B=B=0$, откуда $B=0$.

$F(e)=Ae\ln e=Ae=1,$ откуда $A=\dfrac{1}{e}$.

Таким образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1;\\ \dfrac{1}{e}x\ln x, 1\le x\le e;\\ 1, x\ge e.\end{cases}$$

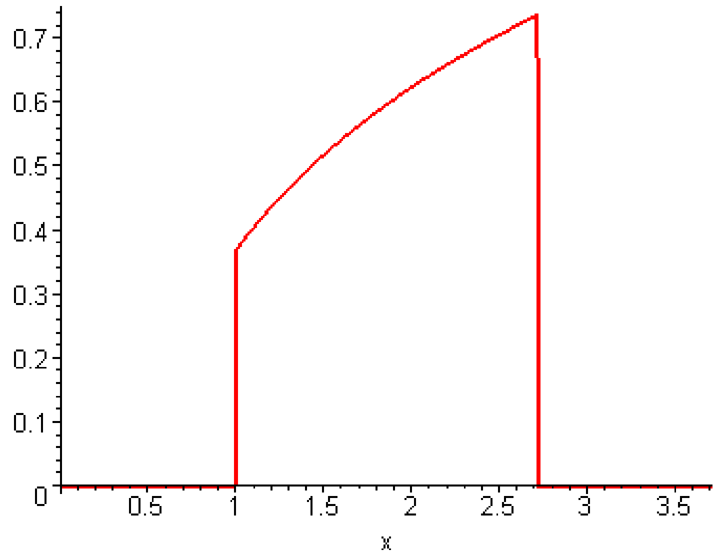
Построим график функции распределения:



Найдем функцию плотности вероятностей по определению:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x\le 1;\\ \dfrac{1}{e}\left(1\ln x+x\dfrac{1}{x}\right), 1\le x\le e;\\ 0, x\ge e.\end{cases}=\begin{cases}0, x\le 1;\\ \dfrac{1}{e}\left(\ln x+1\right), 1\le x\le e;\\ 0, x\ge e.\end{cases}$$

Построим её график:



Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\frac{1}{e}\int_{1}^{e}(\ln x+1)xdx=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_1^e=$$

$$=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}e^2\ln e+\frac{1}{4}e^2\right)-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}1^2\ln 1+\frac{1}{4}1^2\right)=\frac{1}{e}\left(\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}e-\frac{1}{4e}\right)\approx 1,95.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-\left(M(X)\right)^2=\frac{1}{e}\int_{1}^{e}(\ln x+1)x^2dx-\left(\frac{3}{4}e-\frac{1}{4e}\right)^2=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x+\frac{2}{9}x^3\right)\Bigg|_1^e-$$

$$-\left(\frac{3}{4}e-\frac{1}{4e}\right)^2=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{3}e^3\ln e+\frac{2}{9}e^3\right)-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{3}1^3\ln 1+\frac{2}{9}1^3\right)-\left(\frac{3}{4}e-\frac{1}{4e}\right)^2=\frac{5}{9}e^2-\frac{2}{9e}-\left(\frac{3}{4}e-\frac{1}{4e}\right)^2=$$

$$=-\frac{1}{144}e^2-\frac{2}{9e}+\frac{3}{8}-\frac{1}{16e^2}\approx 0,233.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma=\sqrt{D(X)}\approx 0,483$

Найдем вероятность P(X<2):

$$P(X<2)=F(2)-F(-\infty)=\frac{1}{e}2\ln 2-0=\frac{1}{e}2\ln 2\approx 0,51.$$

Задача 3. Непрерывная случайная величина X задана с помощью функции плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x^3}, x>0;\\ 0, x<0.\end{cases}$$

1. найти неизвестные коэффициенты;
2. построить график функции плотности вероятностей;

3. найти функцию распределения и построить её график;
4. найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X;
5. найти вероятность P(X>1).

Решение. Найдем неизвестный коэффициент A из условия нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{A}{1+x^3}dx = A\lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{1+x^3} = A\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\Bigg|_0^B =$$

$$= A\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln(B+1) - \frac{1}{6}\left(B^2 - B + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2B-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln(1) + \frac{1}{6}(1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

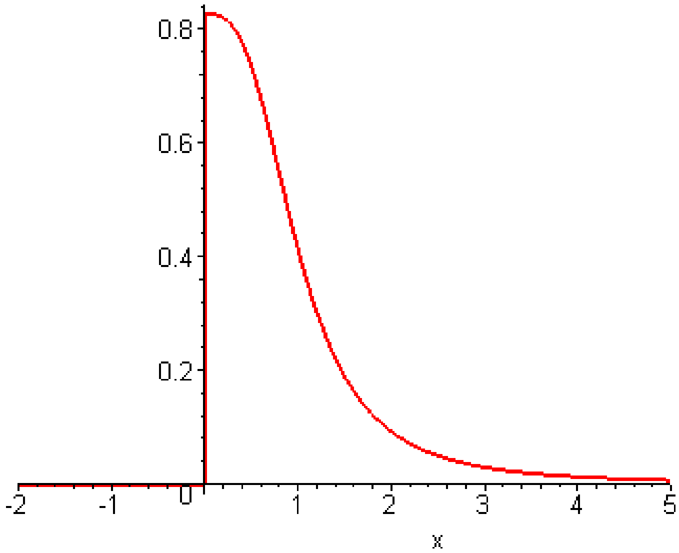
$$= A\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 1,$$

Откуда $A = \dfrac{9}{2\sqrt{3}\pi} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Плотность распределения принимает вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\dfrac{1}{1+x^3}, x > 0; \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

Построим график функции:



Найдем функцию распределения по определению: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, поэтому

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{0}^{x}\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{1}{1+t^3}dt=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\ln(t+1)-\frac{1}{6}\left(t^2-t+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\Bigg|_0^x=$$

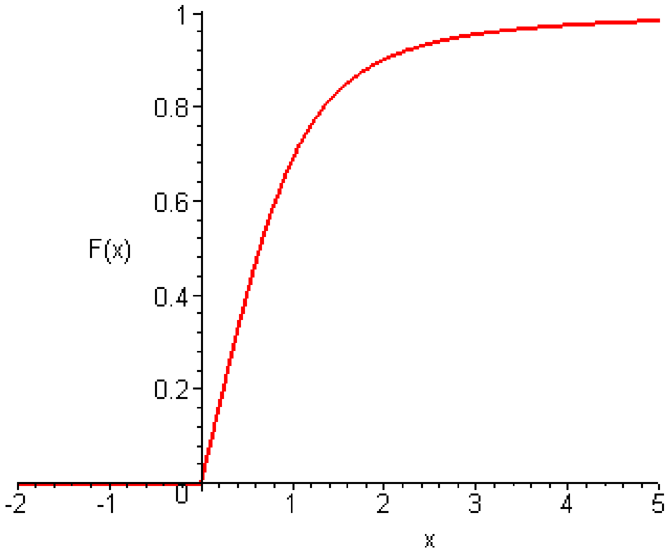
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\ln(1)-\frac{1}{6}(1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\right).$$

Получаем:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\right), x>0;\\ 0, x<0.\end{cases}$$

Построим её график.



Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{x^3+1}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{0}^{B}\frac{xdx}{1+x^3}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{6}\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\Bigg\|_0^B=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\ln(B+1)+\frac{1}{6}\left(B^2-B+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2B-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{3}\ln(1)-\frac{1}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)=1.$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-\left(M(X)\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^3+1}-1=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{0}^{B}\frac{x^2dx}{1+x^3}-1=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\left(\ln\left(x^3+1\right)\right)\Big\|_0^B-1=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\left(\ln\left(B^3+1\right)-\ln(1)\right)-1=\infty.$$

Найдем вероятность P(X>1):

$$P(X>1)=F(\infty)-F(1)=1-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\ln(1+1)-\frac{1}{6}\left(1^2-1+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\right)\approx 0,309$$

Задача 4. Заданы функция плотности нормального распределения $f(x)=Ae^{-\frac{2(x/2+1)^2}{9}}$ и интервал (-5;1).

1. найти математическое ожидание *m*;
2. найти среднее квадратическое отклонение σ и дисперсию *D*;
3. найти неизвестный коэффициент *A*;
4. найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал;
5. построить график функции плотности и на нём отметить площадь, равную найденной вероятности.

Решение. По виду плотности распределения

$$f(x)=Ae^{-\frac{2(x/2+1)^2}{9}}=Ae^{-\frac{(x+2)^2}{18}}=Ae^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 3^2}},$$

сопоставляя его с каноническим видом для нормально распределенной случайной величины:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Получаем, что математическое ожидание $a=m=-2$. Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma=3$, дисперсия $D=\sigma^2=9$.

Найдем неизвестный коэффициент $A=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$.

Получаем искомую плотность распределения: $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 3^2}}$.

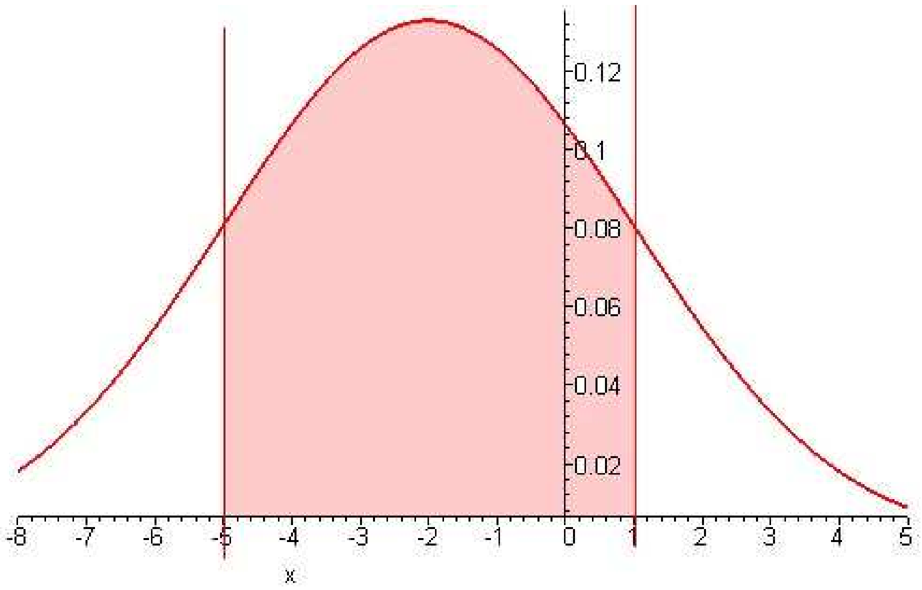
Найдем вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(-5;1)$.

Используем формулу $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа (значения берутся из таблицы).

Получаем:

$$P(-5<X<1)=\Phi\left(\frac{1+2}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-5+2}{3}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=2\cdot 0,3413=0,6826.$$

Построим график функции плотности и на нём отметим площадь, равную найденной вероятности (закрашенная область):



Задача 5. Число потерь самолётов в эскадрильи в ходе военной операции определённой сложности подчиняется закону распределения Пуассона. Найти вероятность того, что в предстоящей операции потери будут ниже среднего, если последнее составляет для данного вида операций 7 самолётов.

Решение. Пусть X - число потерь самолетов, оно распределяется по закону Пуассона со средним значением $\lambda = 7$, то есть

$P_n(k) = \dfrac{7^k e^{-7}}{k!}$ - вероятность того, что потери составят ровно k самолетов.

Тогда вероятность того, что в предстоящей операции потери будут ниже среднего, равна:

$$P_n(k<7) = P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) =$$

$$= \frac{7^0 e^{-7}}{0!} + \frac{7^1 e^{-7}}{1!} + \frac{7^2 e^{-7}}{2!} + \frac{7^3 e^{-7}}{3!} + \frac{7^4 e^{-7}}{4!} + \frac{7^5 e^{-7}}{5!} + \frac{7^6 e^{-7}}{6!} \approx 0,45.$$

Ответ: 0,45.