Задача 1. Составить план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации максимальна. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		Продукт P_1	Продукт P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Прибыль от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Пусть план производства продукции (x_1, x_2), то есть производится x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2, по смыслу задачи $x_1, x_2 \geq 0$. Тогда целевая функция – прибыль от продажи (реализации) такого количества изделий, составляет $f = 2x_1 + 3x_2$ рублей, ее нужно максимизировать: $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$.

Составим ограничения, связанные с ограниченным количеством ресурсов (запасов сырья):
На сырье S_1: $x_1 + 3x_2 \leq 18$,
На сырье S_2: $2x_1 + x_2 \leq 16$,
На сырье S_3: $x_2 \leq 5$,
На сырье S_4: $3x_1 \leq 21$ или $x_1 \leq 7$.

Пришли к задаче линейного программирования:

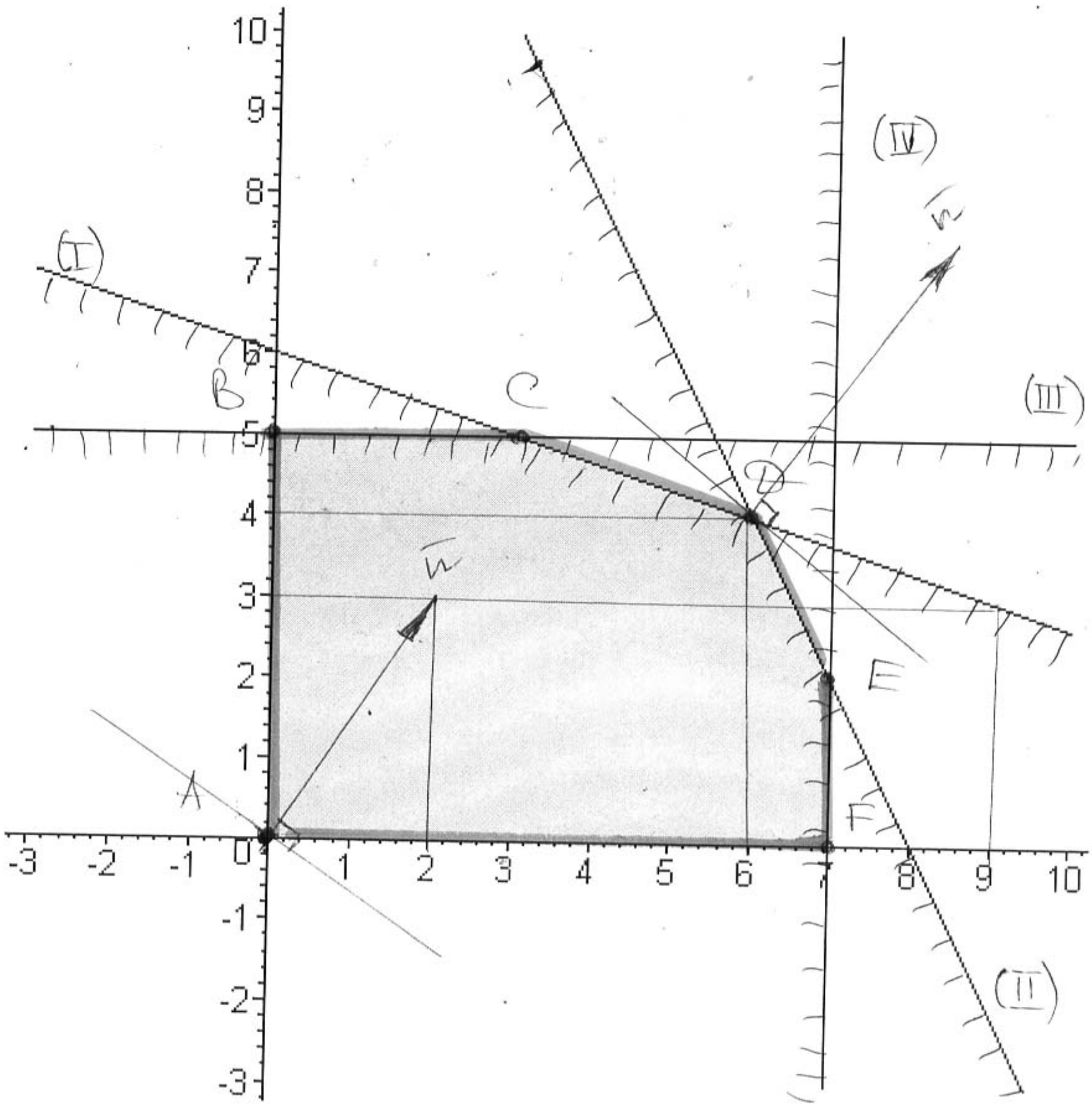
$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}.$$

Так как в задаче только две переменные, решим данную задачу графическим методом.

Построим область допустимых решений, ограниченную прямыми:

(I) $x_1 + 3x_2 = 18$, точки (9, 3) и (0, 6).
(II) $2x_1 + x_2 = 16$, точки (8, 0) и (6, 4).
(III) $x_2 = 5$.
(IV) $x_1 = 7$.



Получаем ограниченную выпуклую область $ABCDEF$.

Строим линию уровня целевой функции $2x_1+3x_2=0$ и вектор градиента $\bar{n}=(2,3)$. Двигаем линию уровня по направлению градиента (наибыстрейшего роста), пока не выйдем из области. Видно, это произойдет в точке D пересечения прямых I и II:

$$\begin{cases} x_1+3x_2=18, \\ 2x_1+x_2=16; \end{cases} \begin{cases} x_1=18-3x_2, \\ 36-6x_2+x_2=16; \end{cases} \begin{cases} x_1=18-3x_2, \\ -5x_2=-20; \end{cases} \begin{cases} x_1=6, \\ x_2=4. \end{cases}$$

Итак, оптимальная точка $D(6;4)$, оптимальное значение функции $f_{\max}=2\cdot 6+3\cdot 4=24$.

Таким образом, чтобы получить при заданных ограничениях на ресурсы максимальную прибыль в размере 24, необходимо произвести 6 изделий вида P_1 и 4 изделия вида P_2.

Задача 2. Составить задачу, двойственную следующей задаче:
$F = -x_1 + 2x_2 \to \max$
при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Решение. Запишем задачу в стандартном виде (ограничения вида $\leq$):

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - x_2 \leq -5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Составим двойственную задачу. Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений и равно четырем:

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min .$$

Строим ограничения, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях. Так как и первая и вторая переменные были неотрицательны, первое и второе ограничение будут иметь знаки $\geq$. Так как все ограничения имеют знак $\leq$, все двойственные переменные неотрицательны. Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции. Получаем:

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

Получили двойственную задачу:

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min ,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$