# Курсовая работа

## 1. Применение систем алгебраических линейных уравнений для описания и анализа модели межотраслевого баланса.

Пусть в производстве товаров участвуют три отрасли. Конечный спрос на продукцию i-й отрасли равен $f_i$ условным единицам. Коэффициенты прямых затрат $a_{ij}$ равны объему продукции i-й отрасли, необходимой для производства единицы продукции j-й отрасли. Значения коэффициентов прямых затрат $a_{ij}$ и конечный спрос $f_i$ на продукцию каждой отрасли приведены в соответствующей таблице:

| *A* | | | *F* |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,1 | 0,1 | 2 |
| 0,3 | 0,3 | 0,4 | 13 |
| 0,4 | 0,1 | 0,2 | 16 |

Требуется:
1) определить, в каком объеме нужно выпускать продукцию для удовлетворения спроса, решив систему линейных уравнений $(E-A)\cdot X = F$ методом Гаусса;

2) исследовать, как изменится выпуск продукции, решая уравнение $X = (E-A)^{-1}\cdot F_1$ как матричное, если спрос на вторую продукцию увеличится на (N + 20) %;
3) исследовать, как изменится выпуск продукции, решая уравнение $X = (E-A)^{-1}\cdot F_2$ как матричное, если спрос на вторую продукцию уменьшится на (n + 10) % .

**Решение.**

1) Определим, в каком объеме нужно выпускать продукцию для удовлетворения спроса, решив систему линейных уравнений $(E-A)\cdot X = F$ методом Гаусса.
Найдем матрицу

$$(E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,7 & -0,4 \\ -0,4 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,7 & -0,4 \\ -0,4 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 0,9x_1 - 0,1x_2 - 0,1x_3 = 2, \\ -0,3x_1 + 0,7x_2 - 0,4x_3 = 13, \\ -0,4x_1 - 0,1x_2 + 0,8x_3 = 16. \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 20, \\ -3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 130, \\ -4x_1 - x_2 + 8x_3 = 160. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое, умноженное на 4. Прибавляем к третьему уравнению первое, умноженное на 8. Получаем:

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 20, \\ -39x_1 + 11x_2 = 50, \\ 68x_1 - 9x_2 = 320. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 9, третье на 11.

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 20, \\ -351x_1 + 99x_2 = 450, \\ 748x_1 - 99x_2 = 3520. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе:

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 20, \\ -351x_1 + 99x_2 = 450, \\ 397x_1 = 3970. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90 - x_2 - x_3 = 20, \\ -390 + 11x_2 = 50, \\ x_1 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90 - 40 - x_3 = 20, \\ x_2 = 40, \\ x_1 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 30, \\ x_2 = 40, \\ x_1 = 10. \end{cases}$$

Получили план $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$.

2) Исследуем, как изменится выпуск продукции, решая уравнение $X = (E - A)^{-1} \cdot F_1$ как матричное, если спрос на вторую продукцию увеличится на (10 + 20) %=30%.

Найдем матричный мультипликатор Леонтьева.

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,7 & -0,4 \\ -0,4 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,310 & 0,227 & 0,277 \\ 1,008 & 1,713 & 0,982 \\ 0,781 & 0,327 & 1,511 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор спроса:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13\cdot 1,3 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16,9 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Тогда выпуск продукции найдем по формуле:

$$X_1 = (E-A)^{-1}\cdot F_1 = \begin{pmatrix} 1,310 & 0,227 & 0,277 \\ 1,008 & 1,713 & 0,982 \\ 0,781 & 0,327 & 1,511 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 16,9 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,884 \\ 46,680 \\ 31,277 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, увеличение спроса на вторую продукцию на 30% повлекло увеличение выпуска продукции по отраслям соответственно на:

$$\frac{10,884-10}{10}\cdot 100\% \approx 8,84\%,$$

$$\frac{46,680-40}{40}\cdot 100\% \approx 16,70\%,$$

$$\frac{31,277-30}{30}\cdot 100\% \approx 4,26\%.$$

3) Исследуем, как изменится выпуск продукции, решая уравнение $X = (E-A)^{-1}\cdot F_2$ как матричное, если спрос на вторую продукцию уменьшится на (4 + 10) %=14 %.

Новый вектор спроса:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13\cdot 0,86 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11,18 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Тогда выпуск продукции найдем по формуле:

$$X_2 = (E-A)^{-1}\cdot F_2 = \begin{pmatrix} 1,310 & 0,227 & 0,277 \\ 1,008 & 1,713 & 0,982 \\ 0,781 & 0,327 & 1,511 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 11,18 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,587 \\ 36,883 \\ 29,404 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уменьшение спроса на вторую продукцию на 14% повлекло уменьшение выпуска продукции по отраслям соответственно на 4,13%, 7,79% и 1,99%.

## 2. Применение определенного интеграла для решения экономических задач

Найти объем продукции, произведенной за период [0; T] , если функция Кобба-Дугласа имеет вид

$$z(t) = (\alpha + \beta t)\cdot e^{\gamma t},$$

$$\alpha = n\cdot N,\ \beta = n,\ \gamma = 1/2N,\ T = N.$$

**Решение.** Найдем параметры задачи:

$$\alpha = 4\cdot 10 = 40,\ \beta = 4,\ \gamma = 1/20,\ T = 10.$$

Тогда $z(t)=(40+4t)\cdot e^{t/20}$.

Получаем, что объем продукции, произведенной за период [0; 10], равен:

$$q=\int_0^T z(t)\,dt=\int_0^{10}(40+4t)\cdot e^{t/20}dt=\begin{vmatrix} u=40+4t & du=4dt \\ dv=e^{t/20}dt & v=20e^{t/20}\end{vmatrix}=20e^{t/20}(40+4t)\Big|_0^{10}-80\int_0^{10}e^{t/20}dt=$$

$$=20\left[e^{10/20}(40+40)-e^{0/20}(40+0)\right]-1600e^{t/20}\Big|_0^{10}=$$

$$=20\left[80e^{1/2}-40\right]-1600e^{1/2}+1600=1600-800=800.$$

**Ответ:** 800 единиц за 10 лет.

## 3. Применение систем дифференциальных уравнений для описания процесса ценообразования

Пусть процесс ценообразования описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1-x_2-n,\\ \dot{x}_2=-3x_1-4x_2+N.\end{cases}$$

где $x_1, x_2$ - цены на товары.

В начальный момент времени цены на товары составляют:
$x_1(0)=N$ условных единиц; $x_2(0)=(N+2)$ условных единиц.

Определить зависимость цен на товары от времени в будущем.

**Решение.** Получаем систему:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1-x_2-4,\\ \dot{x}_2=-3x_1-4x_2+10.\end{cases}$$

$x_1(0)=10,\ x_2(0)=12$.

Решим данную систему. Будем использовать метод исключения. Продифференцируем первое уравнение системы по $t$, получим:

$x_1''=-2x_1'-x_2'$.

Подставляем $x_2'=-3x_1-4x_2+10$ из второго уравнения:

$x_1''=-2x_1'-(-3x_1-4x_2+10)$,

$x_1''=-2x_1'+3x_1+4x_2-10$.

Подставляем из первого уравнения $x_2=-x_1'-2x_1-4$. Получаем:

$x_1''=-2x_1'+3x_1+4(-x_1'-2x_1-4)-10$,

$x_1''=-2x_1'+3x_1-4x_1'-8x_1-16-10$,

$x_1''+6x_1'+5x_1=-26$.

Решаем это уравнение. Сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения. Составим и решим характеристическое уравнение:
$k^2+6k+5=0$, откуда $k_1=-5$, $k_2=-1$, общее решение
$x_{1oo}=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:
$x_{1÷í}=-26/5$.
Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:
$x_1(t)=x_{1oo}+x_{1÷í}=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}-\frac{26}{5}$.

Осталось найти $x_2(t)$, для чего используем соотношение $x_2=-x_1'-2x_1-4$. Подставляем:

$$x_2=-x_1'-2x_1-4=-\left(C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}-\frac{26}{5}\right)'-2\left(C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}-\frac{26}{5}\right)-4=$$

$$=C_1e^{-t}+5C_2e^{-5t}-2C_1e^{-t}-2C_2e^{-5t}+\frac{52}{5}-4=-C_1e^{-t}+3C_2e^{-5t}+\frac{32}{5}.$$

Получили решение:

$$\begin{cases} x_1(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}-\frac{26}{5}, \\ x_2(t)=-C_1e^{-t}+3C_2e^{-5t}+\frac{32}{5}. \end{cases}$$

Используем начальные условия: $x_1(0)=10,\ x_2(0)=12$.

$$\begin{cases} x_1(0)=C_1+C_2-\frac{26}{5}=10, \\ x_2(0)=-C_1+3C_2+\frac{32}{5}=12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=10, \\ C_2=\frac{26}{5}. \end{cases}$$

Искомая зависимость цен на товары от времени в будущем

$$\begin{cases} x_1(t)=10e^{-t}+\frac{26}{5}e^{-5t}-\frac{26}{5}, \\ x_2(t)=-10e^{-t}+\frac{78}{5}e^{-5t}+\frac{32}{5}. \end{cases}$$

## 4. Определение оптимального объема выпуска продукции

Фирма имеет два филиала, затраты на производство в которых описывается функциями

$$C_1(x)=\frac{n}{100}x^2-nx+100N,$$

$$C_2(y)=\frac{N}{100}y^2+Ny+100n,$$

соответственно, где x и y - объемы производимой продукции.

Общий спрос на товар фирмы определяется ценой $p$ за единицу продукции, зависящей от объема выпускаемой продукции $z=x+y$, и определяется функцией $z=100(N+n)-2p$.

Тогда прибыль фирмы задается функцией

$$Q(x,y)=p(x+y)-\left[C_1(x)+C_2(y)\right].$$

Требуется найти:

1) оптимальный объем выпуска продукции для производителя;
2) оптимальную цену;
3) распределение производимой продукции по филиалам.

**Решение.**

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z=1400-2p, \\ z=x+y. \end{cases}$$

И найдем цену товара как функцию от объемов выпускаемой продукции:

$$p=\frac{1}{2}(1400-z)=\frac{1}{2}(1400-x-y)=700-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y.$$

Подставим это выражение в функцию прибыли:

$$Q(x,y)=p(x+y)-\left[C_1(x)+C_2(y)\right]=$$

$$=\left(700-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)(x+y)-\left[\frac{4}{100}x^2-4x+1000+\frac{10}{100}y^2+10y+400\right]=$$

$$=-0,54x^2-0,6y^2-xy+704x+690y-1400.$$

Найдем экстремум этой функции. Вычислим частные производные, приравняем к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1,08x-x+704=0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}=-1,2y-x+690=0. \end{cases}$$

Получим подозрительные на экстремум точки.

$$\begin{cases} x\approx 523, \\ y\approx 139. \end{cases}$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$A=\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=-1{,}08,$$

$$B=\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}=-1,$$

$$C=\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=-1{,}2.$$

Так как $\Delta = AC-B^2=(-1{,}08)(-1{,}2)-(-1)^2>0$, то в точке с координатами $(523;139)$ функция имеет экстремум. Так как $A<0$, это точка максимума.

Итак, фирма должна производить $x=523$ единицы продукции в первом филиале, $y=139$ единиц продукции во втором филиале, всего 662 единицы продукции.

Оптимальная цена будет $p=700-\frac{1}{2}523-\frac{1}{2}139=369.$

**Задача 5. Применение дифференциальных уравнений в модели формирования равновесной цены**

В задании используются следующие обозначения:

- $a_1, b_1, c_1$ - коэффициенты функции спроса $D(p)=a_1-b_1p-c_1p'$ □
- $a_2, b_2, c_2$ - коэффициенты функции предложения $S(p)=a_2+b_2p+c_2p'$
- $p_0$ - начальное значение функции цены.

Значения этих величин приведены в соответствующей таблице:

| | |
|---|---|
| $a_1$ | 54 |
| $b_1$ | 4 |
| $c_1$ | 3 |
| $a_2$ | 26 |
| $b_2$ | 3 |
| $c_2$ | 2 |
| $p_0$ | 6 |

Требуется:
1) составить дифференциальное уравнение относительно равновесной цены $p$;
2) найти решение задачи Коши, если $p|_{t=0}=p_0$;
3) найти $\lim_{t\to\infty} p(t)$, указать тенденцию изменения равновесной цены при $t\to\infty$;
4) построить график зависимости равновесной цены от времени.

**Решение.** Получаем
$D(p)=54-4p-3p'$ 
$S(p)=26+3p+2p'$.

Составим дифференциальное уравнение относительно равновесной цены $p$, приравнивая функции спроса и предложения:
$D(p)=S(p)$,
$26+3p+2p'=54-4p-3p'$,
$5p'+7p-28=0$.

Решаем это уравнение, разделяя переменные:
$5p'+7p-28=0$,
$5p'=28-7p$,
$\frac{dp}{dt}=\frac{7}{5}(4-p)$,
$\frac{dp}{4-p}=\frac{7}{5}dt$,
$\int\frac{dp}{4-p}=\int\frac{7}{5}dt$,
$\ln|p-4|=-\frac{7}{5}t+\ln|C|$,
$p-4=Ce^{-\frac{7}{5}t}$,
$p=4+Ce^{-\frac{7}{5}t}$.

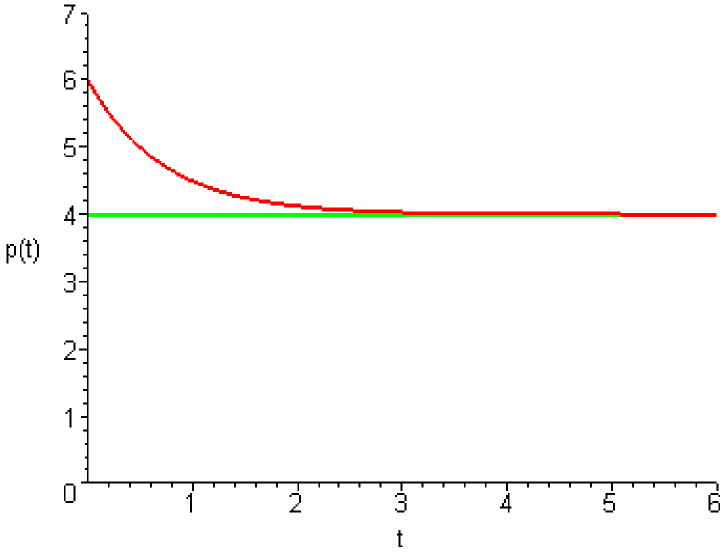
Получили общее решение $p=4+Ce^{-\frac{7}{5}t}$. Найдем постоянную $C$ из начального условия $p(0)=6$: $p(0)=4+Ce^{0}=4+C=6,\ C=2$.

Получили $p(t)=4+2e^{-\frac{7}{5}t}$. Это решение задачи Коши.

Найдем
$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\lim_{t\to\infty}\left(4+2e^{-\frac{7}{5}t}\right)=4+2\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{7}{5}t}=4+2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{7}{5}t}}=4+2\left(\frac{1}{\infty}\right)=4+0=4.$$

Равновесная цена при $t\to\infty$ стремится к постоянному значению $p=4$, стабилизируется.

Построим график зависимости равновесной цены от времени.




Красным график цены. Зеленым асимптота $p = 4$.

## 6. Применение двойного интеграла для расчета ресурсов территории

Известно, что средняя плотность населения составляет 40 чел/км$^2$ в мире, 8,3 чел/км$^2$ в России, 9722 чел/км$^2$ в Москве и 0,03 чел/км$^2$ в Эвенкийском районе Красноярского края.

Требуется найти:
1) численность населения района Российской Федерации, если плотность распределения населения задана функцией $\rho = \rho_0 e^{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ чел/км$^2$, территория имеет форму круга с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R км;
2) среднюю плотность населения района;
3) процентные доли средней плотности населения района относительно каждой средней плотности, приведенной в условиях задания.

Параметры: $x_0 = n,\ y_0 = N,\ R = n + N,\ \rho_0 = 100n$ чел/км$^2$.

**Решение.**
Получаем: $x_0 = 4,\ y_0 = 10,\ R = 14,\ \rho_0 = 400$ чел/км$^2$. $\rho = 400e^{-(x-4)^2-(y-10)^2}$.

Найдем численность населения района Российской Федерации, если плотность распределения населения задана функцией $\rho = 400e^{-(x-4)^2-(y-10)^2}$ чел/км$^2$, территория имеет форму круга с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом 14 км.

Получаем $q = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D 400e^{-(x-4)^2-(y-10)^2}\,dxdy =$

Перейдем к полярным координатам с полюсом в точке $(4;10)$, ось направлена по оси абсцисс:

$$=\iint\limits_D 400e^{-r^2}rdrd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{14}400e^{-r^2}rdr=2\pi\left(-200\right)\int\limits_0^{14}e^{-r^2}d\left(-r^2\right)=$$

$$=-400\pi e^{-r^2}\Big|_0^{14}=-400\pi\left(e^{-14^2}-1\right)\approx 1256,6.$$

Общая численность равна 1256,6 человек.

2) Найдем среднюю плотность населения района.
Вычислим площадь территории – круга радиуса 14 км, $S=\pi R^2=14^2\pi=196\pi$.

Тогда средняя плотность населения равна:
$\rho_{ñð}=\dfrac{q}{S}=\dfrac{1256,6}{196\pi}\approx 2,041$ чел/км$^2$.

3) Найдем процентные доли средней плотности населения района относительно каждой средней плотности, приведенной в условиях задания.

Средняя плотность населения составляет
40 чел/км$^2$ в мире. Процентная доля $n_1=\dfrac{2,041}{40}\cdot 100\%\approx 5,1\%$.
8,3 чел/км$^2$ в России. Процентная доля $n_2=\dfrac{2,041}{8,3}\cdot 100\%\approx 24,59\%$.
9722 чел/км$^2$ в Москве. Процентная доля $n_3=\dfrac{2,041}{9722}\cdot 100\%\approx 0,02\%$.
0,03 чел/км$^2$ в Эвенкийском районе Красноярского края. Процентная доля
$n_4=\dfrac{2,041}{0,03}\cdot 100\%\approx 6802,33\%$.