Контрольные задания
по курсу « Экономико-математические методы»

Задание 1. Найти экстремум функции

$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to extr,$

$при \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \quad x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 15$

Решение. Используем метод множителей Лагранжа для данной задачи условной минимизации нелинейной функции. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2) = z(X) + \lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \lambda_1 (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10) + \lambda_2 (x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15).$$

Записываем необходимые условия экстремума, дифференцируя функцию Лагранжа по всем входящим в нее переменным, и приравнивая частные производные к нулю. Придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_4} = 2x_4 + 5\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим стационарную точку:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{74}, \\ x_2 = -\dfrac{5}{37}, \\ x_3 = \dfrac{155}{74}, \\ x_4 = \dfrac{30}{37}, \\ \lambda_1 = \dfrac{90}{37}, \\ \lambda_2 = -\dfrac{85}{37}. \end{cases}$$

Точка $X_0 = \left(-\frac{5}{74}, -\frac{5}{37}, \frac{155}{74}, \frac{30}{37}\right)$ – подозрительная на экстремум для исходной функции $z(X)$. В этой точке функция принимает значение:

$$z_{extr} = z\left(-\frac{5}{74}, -\frac{5}{37}, \frac{155}{74}, \frac{30}{37}\right) = \frac{375}{74}.$$

Задание 2. Решить игру

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Решение. Рассмотрим платежную матрицу игры

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим α_i. Получаем:

$\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = -2,\ \alpha_4 = -2$.

Выберем максимальное из этих значений $\alpha = -1$ - нижняя цена игры.

Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам:

$\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 3$.

Минимальное из этих чисел $\beta = 2$ - верхняя цена игры.

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях, цена игры находится в промежутке от -1 до 2 (между нижней и верхней ценой игры).

Игра имеет большую размерность, попробуем ее уменьшить, выделив невыгодные стратегии и вычеркнув их из матрицы. Так как все элементы строки А2 меньше (или равны) элементов строки А1, вычеркиваем строку А2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ & & & \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили упрощенную матрицу (А1, А3, А4, В1, В2, В3, В4):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к матрице положительное число $C = 2$, чтобы получить неотрицательные элементы:

$$A'' = A' + C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем решение игры, заданной данной платежной матрицей в смешанных стратегиях. Перейдем к задаче линейного программирования. Пусть $P = (p1, p2, p3)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока, $Q = (q1, q2, q3, q4)$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока.

Составим пару симметричных двойственных задач, так чтобы исходная задача была стандартной задачей максимизации, матрица коэффициентов совпадала с платежной матрицей A'', а коэффициенты при неизвестных в целевой функции и свободные члены неравенств были бы равны единице.

Для первого игрока получаем задачу:

$$G(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$
$$2x_1 + 0x_2 + 5x_3 \ge 1,$$
$$4x_1 + 1x_2 + 0x_3 \ge 1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 \ge 1,$$
$$1x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Для второго игрока получаем задачу:

$F(Y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max,$
$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 1y_4 \le 1,$
$0y_1 + 1y_2 + 4y_3 + 5y_4 \le 1,$
$5y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 3y_4 \le 1,$
$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4.$

Здесь $F_{\max} = \frac{1}{\nu}$, $y_i = \frac{q_i}{\nu}$, $x_i = \frac{p_i}{\nu}$, ν - цена игры.

Приведем задачу к каноническому виду:
$F(Y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max,$
$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 1y_4 + y_5 = 1,$
$0y_1 + 1y_2 + 4y_3 + 5y_4 + y_6 = 1,$
$5y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 3y_4 + y_7 = 1,$
$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4,5,6,7.$

Опорный план: (0,0,0,0,1,1,1). Составляем симплекс-таблицу, решаем задачу симплекс-методом (преобразованием симплекс-таблиц), разрешающий элемент выделяем серым на каждом шаге:

Базис	**План**	**y1**	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**
y5	1	2	4	3	1	1	0	0
y6	1	0	1	4	5	0	1	0
y7	1	5	0	0	3	0	0	1
F	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Базис	**План**	**y1**	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**
y5	3/5	0	4	3	-1/5	1	0	-2/5
y6	1	0	1	4	5	0	1	0
y1	1/5	1	0	0	3/5	0	0	1/5
F	1/5	0	-1	-1	-2/5	0	0	1/5

Базис	**План**	**y1**	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**
y2	3/20	0	1	3/4	-1/20	1/4	0	-1/10
y6	17/20	0	0	13/4	101/20	-1/4	1	1/10
y1	1/5	1	0	0	3/5	0	0	1/5
F	7/20	0	0	-1/4	-9/20	1/4	0	1/10

Базис	**План**	**y1**	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**
y2	16/101	0	1	79/101	0	25/101	1/101	-10/101
y4	17/101	0	0	65/101	1	-5/101	20/101	2/101
y1	10/101	1	0	-39/101	0	3/101	-12/101	19/101
F	43/101	0	0	4/101	0	23/101	9/101	11/101

План оптимален.

Получаем $y_1 = \frac{10}{101}$, $y_2 = \frac{16}{101}$, $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{17}{101}$, $F_{\max} = \frac{43}{101}$, поэтому цена игры $v'' = \frac{1}{F_{\max}} = \frac{101}{43}$.

Смешанные стратегии второго игрока:
$$Q'' = v''Y = \frac{101}{43}\left(\frac{10}{101}; \frac{16}{101}; 0; \frac{17}{101}\right) = \left(\frac{10}{43}; \frac{16}{43}; 0; \frac{17}{43}\right)$$

Оптимальные стратегии первого игрока найдем из последней симплекс таблицы (последняя строка): $x_1 = \frac{23}{101}$; $x_2 = \frac{9}{101}$, $x_3 = \frac{11}{101}$, тогда
$$P'' = v''X = \frac{101}{43}\left(\frac{23}{101}; \frac{9}{101}; \frac{11}{101}\right) = \left(\frac{23}{43}; \frac{9}{43}; \frac{11}{43}\right).$$

Исходная игра с матрицей A имеет оптимальные стратегии игроков:
$$P^* = \left(\frac{23}{43}; 0; \frac{9}{43}; \frac{11}{43}\right),\ Q^* = \left(\frac{10}{43}; \frac{16}{43}; 0; \frac{17}{43}\right).$$
Цена игры $v^* = v - C = \frac{101}{43} - 2 = \frac{15}{43}$.

Задание 3. Решить задачу линейного программирования
$Z = -x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 9x_5 \to \min$
при ограничениях:
$8x_1 - 3x_2 + x_4 = 2,$
$x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 9,$
$5x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 + 2x_5 = 8,$
$x_i \ge 0.$

Решение. Так как в задаче нет единичного базиса, введем искусственные переменные:
$Z = -x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 9x_5 + Mz_1 + Mz_2 + Mz_3 \to \min$
при ограничениях:
$8x_1 - 3x_2 + x_4 + z_1 = 2,$
$x_3 + 6x_4 - 6x_5 + z_2 = 9,$
$5x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 + 2x_5 + z_3 = 8,$
$x_i \ge 0,\ z_j \ge 0.$
M - некоторая достаточно большая константа.

Записываем первую симплекс-таблицу для плана $X = (0,0,0,0,0,2,9,8)$:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	z3
z1	2	8	-3	0	1	0	1	0	0
z2	9	0	0	1	6	-6	0	1	0
z3	8	5	-1	8	-1	2	0	0	1
-Z	-19M	-13M-1	4M+7	-9M+3	-6M+5	4M+9	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при М, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой ($x1$, оценка -13M), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам этого столбца: $\min\left\{\frac{2}{8};-;\frac{8}{5}\right\}=\frac{1}{4}$ (строка $z1$). Выводим зи базиса $z1$, вводим $x1$. Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	z2	z3
x1	1/4	1	-3/8	0	1/8	0	0	0
z2	9	0	0	1	6	-6	1	0
z3	27/4	0	7/8	8	-13/8	2	0	1
-Z	-63/4M+1/4	0	-7/8M+ +53/8	-9M+3	-35/8M+ +41/8	4M+9	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при М, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой ($x3$, оценка -9M), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам этого столбца: $\min\left\{-;\frac{9}{1};\frac{27/4}{8}\right\}=\frac{27}{32}$ (строка $z3$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	z2
x1	1/4	1	-3/8	0	1/8	0	0
z2	261/32	0	-7/64	0	397/64	-25/4	1
x3	27/32	0	7/64	1	-13/64	1/4	0
-Z	-261/32M-73/32	0	7/64M+ +403/64	0	-397/64M+ +367/64	25/4M+33/4	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при М, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой ($x4$, оценка -397/64M), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам этого столбца: $\min\left\{\frac{1/4}{1/8};\frac{261/32}{397/64};-\right\}=\frac{261}{397/2}$ (строка $z2$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x1	34/397	1	-148/397	0	0	50/397
x4	522/397	0	-7/397	0	1	-400/397
x3	441/397	0	42/397	1	0	18/397
-Z	-3899/397	0	2540/397	0	0	5569/397

В последней строке нет отрицательных оценок, оптимальный план найден:

$x_1=\frac{34}{397}, x_2=0,\ x_3=\frac{441}{397},\ x_4=\frac{522}{397},\ Z_{\min}=\frac{3899}{397}.$

Задача 4. Рассматривается работа автозаправочной станции, на которой имеется 4 заправочных колонки. Заправка одной автомашины длится в среднем 3 минуты. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает автомашина, нуждающаяся в заправке бензина. Число мест в очереди практически неограниченно. Все машины, вставшие в очередь на заправку, «терпеливо» дожидаются своей очереди. Определить среднее время, проходящее с момента прибытия машины на заправку, до момента ее заправки; среднее число занятых мест; среднее число машин в очереди; среднее время простоя колонки между заправками.

Решение. Имеем систему массового обслуживания (СМО) с четырьмя каналами (четыре колонки) с ожиданием и неограниченной очередью. Получаем параметры $n=4$, $\lambda=1$ (интенсивность входящего потока, машин в минуту), $\mu=\frac{1}{3}$ (интенсивность потока обслуживания, машина за 3 минуты). Нагрузка системы $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{1/3}=3$, показатель нагрузки на один канал $\psi=\frac{\rho}{n}=\frac{3}{4}<1$, поэтому предельный (стационарный) режим работы СМО существует. Определим характеристики работы данной СМО в предельном режиме.

Обозначим $p_i\,(0\le i\le n)$ предельную вероятность того, что в системе занято i каналов, а через p_{n+r} - предельную вероятность того, что в системе заняты все n каналов и r заявок стоят в очереди. Найдем предельное распределение вероятностей:

$$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\frac{1}{1-\psi}\right]^{-1}=$$

$$=\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\frac{3^5}{4\cdot 4!}\frac{1}{1-3/4}\right]^{-1}=\frac{2}{53}\approx 0,0377.$$

Остальные вероятности:

$$p_i=\frac{\rho^i}{i!}p_0, i=1,2,3,4,\quad p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r n!}p_0\ (r\ge 1).$$

Вероятность простоя каналов равна $p_0=0,0377$.

Вероятность отказа равна нулю, так как все заявки будут в конечном итоге приняты в систему.

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания) $Q=1$, абсолютная пропускная способность $A=\lambda=1$.

Среднее число занятых мест (колонок) $N_s=A/\mu=\rho=3$.

Среднее число машин в очереди $N_{line}=\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2}p_0=\frac{4^4}{4!}\cdot\frac{(3/4)^5}{(1-3/4)^2}\cdot\frac{2}{53}=\frac{81}{53}\approx 1,528$.

Среднее число машин на заправке и в очереди (заявок в системе): $N_{sys}=N_s+N_{line}=3+1,528=4,528$.

Среднее время заявки в очереди (среднее время, проходящее с момента прибытия машины на заправку, до момента начала ее заправки): $T_{line} = N_{line} / \lambda = \frac{1,528}{1} \approx 1,528$ минут.

Среднее время заявки в системе (машины возле заправки, и в процессе заправки): $T_{sys} = N_{sys} / \lambda = \frac{4,528}{1} \approx 4,528$ минут.

Среднее время простоя колонок между заправками $\frac{(n - N_s)}{\lambda} = \frac{4-3}{1} = 1$ минута.