Контрольная работа по теории игр

Задача 1

Два человека должны договориться о дележе общего подарка стоимостью единица, чтобы получить возможность распоряжаться своей долей. Каждому важен размер не только своей доли, но и доли другого. Оба участника дележа завистливы и свой выигрыш оценивают величиной по формуле:

u = x – a * y , где

x - своя доля,

y - доля другого,

a - одинаковая степень зависти для обоих, причем 0<a<1 (диапазон)

Один из игроков предложил вариант дележа подарка. Второй может или согласиться или отказаться. В случае согласия происходит дележ на основе сделанного предложения. При отказе каждый получает ноль.

1 вопрос. Нужно применить обратную индукцию для поиска равновесия.

2 вопрос. Дележ происходит в два этапа. Второй этап возникает после отказа на первом этапе и право предлагать дележ на втором этапе определяется жребием, то есть бросается симметричная монета (орел-решка). Считается, что оба этапа проводятся в один день, поэтому время получения выигрыша не учитывается игроками при принятии решений. Если на втором этапе получен отказ от дележа, то каждый игрок получает по нулю. Нужно применить обратную индукцию для поиска равновесия.

Решение.

1. Итак, один из игроков (например, 2-й) предлагает вариант дележа, себе он хочет долю: $y \in [0;1]$

Тогда 1-му игроку остается доля: $x = 1 - y$

Выигрыш 1-го игрока: $u = x - ay = (1-y) - ay = 1 - y - ay = 1 - (1+a)y$

Суть метода обратной индукции – начиная с конца игры определяем кому как выгодно пойти (каждый игрок выбирает больший средний выигрыш).

У нас игра заканчивается на 1 этапе, согласился 1-й игрок или нет, игра окончена.

Теперь оцениваем с позиции 1 игрока – если он соглашается, то получает выигрыш $u = 1-(1+a)y$, если нет, то ничего не получает, $u = 0$.

Чтобы согласится, его выигрыш должен быть положительным:

$$u = 1-(1+a)y > 0$$
$$(1+a)y < 1$$

Возвращаемся ко 2 игроку, который предлагает вариант дележа, требуя себе $y \in [0;1]$, он понимает, что получит хоть что то, если будет соблюдаться условие $(1+a)y < 1$, иначе 1-й игрок не согласится, и он ничего не получит.

То есть он должен выбрать такое максимальное $y \in [0;1]$, чтобы

$$(1+a)y < 1$$
$$y < \frac{1}{1+a}$$

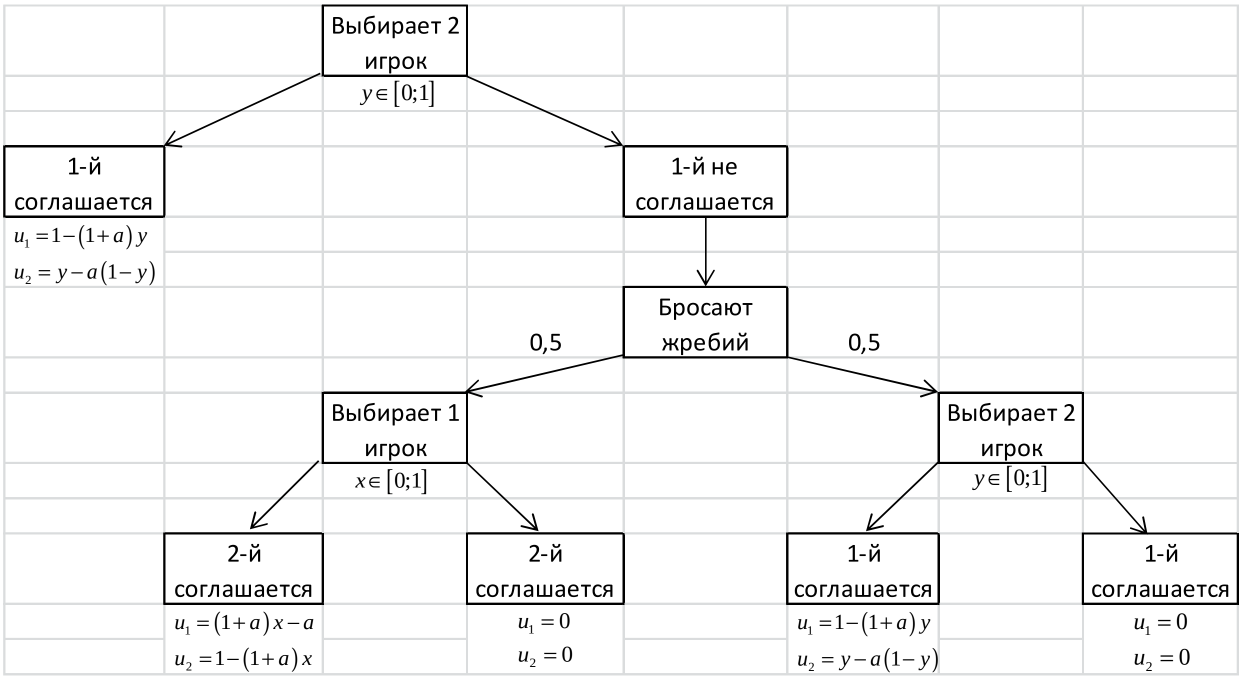
При стремлении долей деления к бесконечности равновесие будет:

1 игрок выбирает долю: $y = \frac{1}{1+a}$ (на самом деле он выбирает чуть меньше)

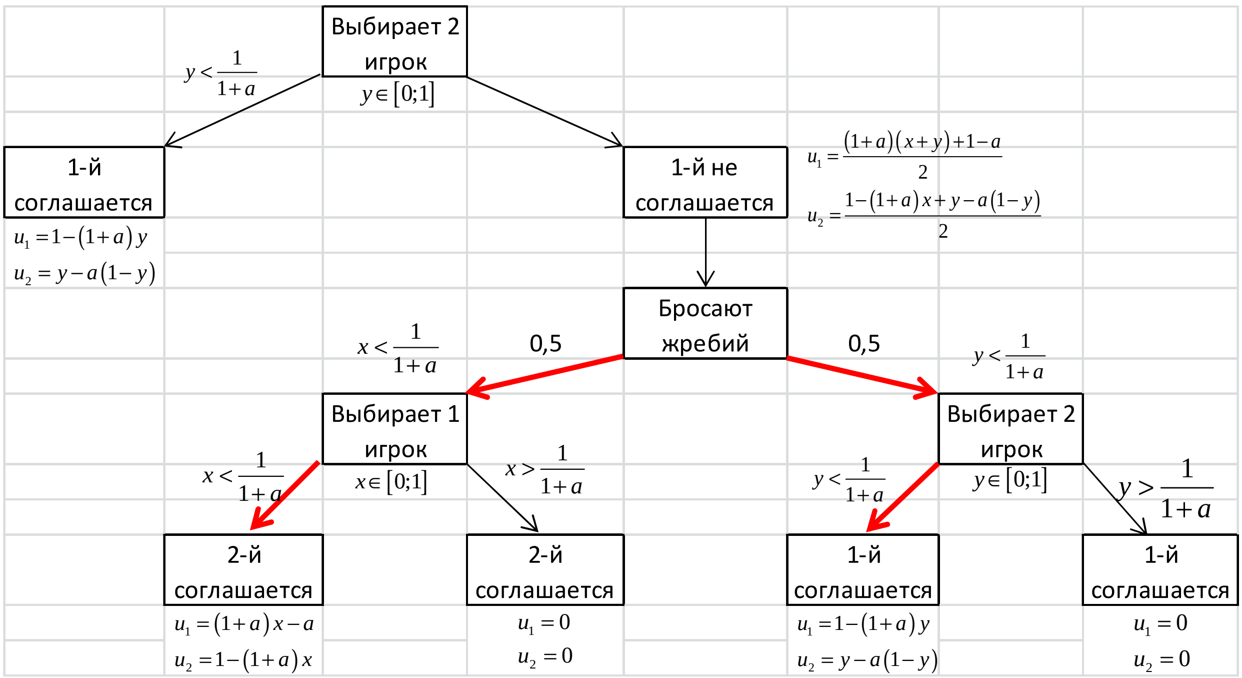
2 игрок соглашается, и получает выигрыш $u = 1-(1+a)y = 1-(1+a)\frac{1}{1+a} = 0$ (на самом деле он получает чуть больше).

2. Рассматриваем 2-этапную игру.

Строим граф.



Двигаемся снизу вверх.



Сравниваем

$$u_1 = 1-(1+a)y$$
$$u_2 = y-a(1-y)$$

и

$$u_1 = \frac{\left[(1+a)x - a\right] + \left[1-(1+a)y\right]}{2}$$

$$u_2 = \frac{\left[1-(1+a)x\right] + \left[y - a(1-y)\right]}{2}$$

Первый игрок предпочтет 1-й вариант, если

$$\left[(1+a)x - a\right] > \left[1-(1+a)y\right]$$

Второй игрок предпочтет 1-й вариант, если

$$\left[1-(1+a)x\right] > \left[y - a(1-y)\right]$$

Совмещаем.

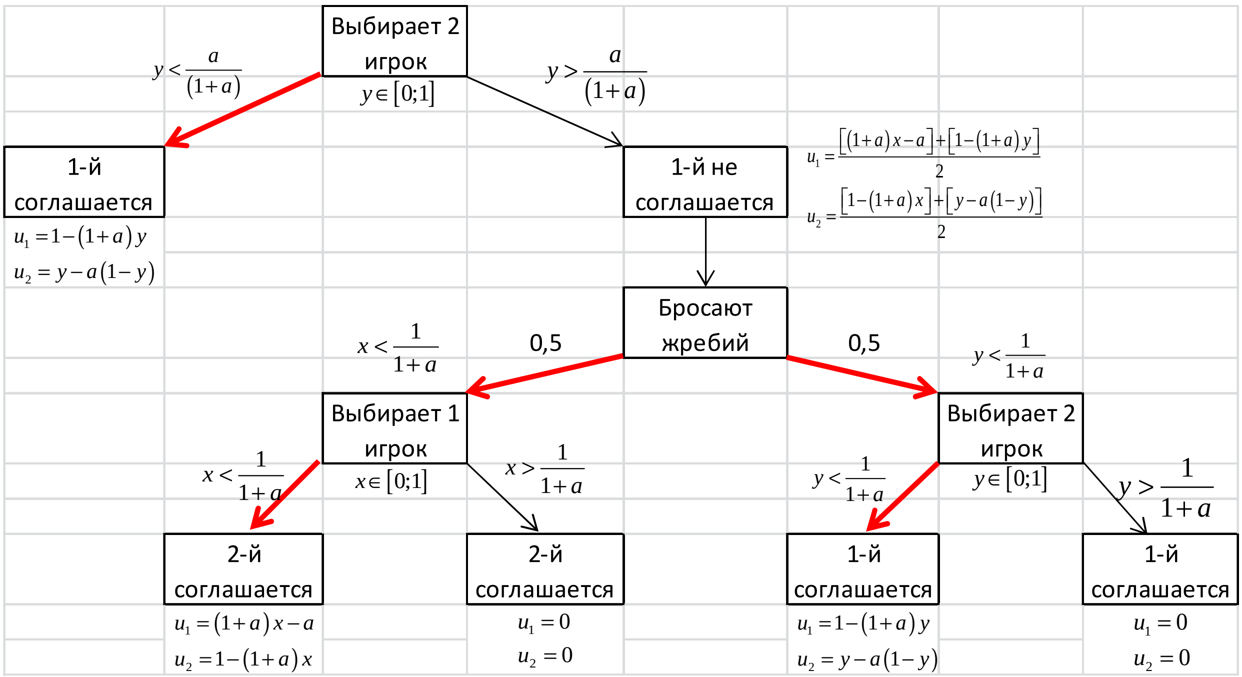
$$\begin{cases} (1+a)x - a > 1-(1+a)y \\ 1-(1+a)x > y - a(1-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+a)(1-y) - a > 1-(1+a)y \\ 1-(1+a)(1-y) > y - a(1-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+a-y-ay-a > 1-y-ay \\ 1-1+a-y-ay > y-a+ay \end{cases}$$

$$2a > 2y + 2ay$$

$$y < \frac{a}{(1+a)}$$



То есть теперь на 1 этапе 1-й игрок соглашается, если $y < \dfrac{a}{(1+a)}$.

Задача 2

На аукционе продается купюра 100 долларов. Имеются 2 покупателя, которые одновременно и независимо друг от друга подают свои заявки. Заявки кратны доллару. На аукционе побеждает тот, который подал наибольшую заявку. При равенстве заявок победитель равновероятно определяется жребием. Победитель получает купюру 100 долларов заплатив то, что указано в заявке. Выигрыш проигравшего на аукционе равен нулю.

Вопросы:

1) Построить игру в нормальной форме (матрица),

2) Провести процесс последовательного исключения доминируемых стратегий,

3) Найти равновесие в этой игре.

Решение.

1) Строим игровую матрицу 10 х 10

По строкам – возможные ставки 1 игрока [1;10], по столбцам – возможные ставки 2 игрока [1;10]

В матрице – выигрыш 1 игрока.

1 игр \ 2 игр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	49	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	98	48	0	0	0	0	0	0	0	0
3	97	97	47	0	0	0	0	0	0	0
4	96	96	96	46	0	0	0	0	0	0
5	95	95	95	95	45	0	0	0	0	0
6	94	94	94	94	94	44	0	0	0	0
7	93	93	93	93	93	93	43	0	0	0
8	92	92	92	92	92	92	92	42	0	0
9	91	91	91	91	91	91	91	91	41	0
10	90	90	90	90	90	90	90	90	90	40

Формула выигрыша: $\begin{cases} 100 - x, \text{если } x > y \\ 100 * 0.5 - x, \text{если } x = y \\ 0, \text{если } x < y \end{cases}$

x – ставка 1 игрока

y – ставка 2 игрока

Конечно, у игроков могут быть и большие чем 10 долл. ставки, но суть игры не меняется.

2) Провести процесс последовательного исключения доминируемых стратегий

Рассмотрим матрицу с позиции доминирования.

Для 1 игрока доминирующих стратегий (то есть строк, в которых выигрыш не меньше чем в любой другой строке, а в одном столбце – больше) нет.

Для 2 игрока доминирующие стратегии (то есть столбцов, в которых выигрыш не больше чем в любой другой строке, а в одной строке – меньше) есть, доминирующая стратегия – последняя, 10 долл.

1 игр \ 2 игр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	49	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	98	48	0	0	0	0	0	0	0	0
3	97	97	47	0	0	0	0	0	0	0
4	96	96	96	46	0	0	0	0	0	0
5	95	95	95	95	45	0	0	0	0	0
6	94	94	94	94	94	44	0	0	0	0
7	93	93	93	93	93	93	43	0	0	0
8	92	92	92	92	92	92	92	42	0	0
9	91	91	91	91	91	91	91	91	41	0
10	90	90	90	90	90	90	90	90	90	40

То есть, делая максимальную ставку – 10 долл. 2-й игрок минимизирует выигрыш 1-го игрока по каждой строке.

Далее переходим к 1-му игроку, он знает, что 2-й игрок выбирает свою крайнюю стратегию – 10 долл., и максимизируя свой выигрыш (по последнему столбцу), выбирает также свою максимальную стратегию – 10 долл.

1 игр \ 2 игр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	49	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	98	48	0	0	0	0	0	0	0	0
3	97	97	47	0	0	0	0	0	0	0
4	96	96	96	46	0	0	0	0	0	0
5	95	95	95	95	45	0	0	0	0	0
6	94	94	94	94	94	44	0	0	0	0
7	93	93	93	93	93	93	43	0	0	0
8	92	92	92	92	92	92	92	42	0	0
9	91	91	91	91	91	91	91	91	41	0
10	90	90	90	90	90	90	90	90	90	***40***

3) Найти равновесие в этой игре.

Пришли к равновесию – оба игрока выбирают свои крайние значения, то есть назначают максимальные ***одинаковые*** ставки (по 10 долл).

если у игроков будет по 50 долл., то равновесие будет в назначении также максимальных ставок – по 50 долл.

Данная стратегия будет верна при наличии одинакового количества средств до 100 долл., больше 100 долл. за купюру никто не даст.