Математические модели в экономике
Теория игр
Контрольная работа

Задача №1. Используя теорию игр проанализировать ситуацию и принять решение. Рассмотреть ситуацию, как антогонистическую игру и игру с природой.

Обувная фабрика планирует выпуск трех моделей обуви А, В, С. Общий объем производства обуви ограничен имеющимися мощностями. Спрос на эти модели зависит от ситуации на рынке, которую можно приближенно характеризовать так же тремя состояниями I, II, III. Известны оценки величины спроса на указанные модели обуви в зависимости от состояния рынка. Они задаются матрицей:

	I	II	III
А	32-0,5N1	23+0,5N2	22+0,6N2
Б	21-0,8N1+0,5N2	31-1,2N1	23+1,5N2
В	20+0,7N2	21+N1-1,4N2	24+1,5N2

Состояние рынка случайным образом меняется в зависимости от неуправляемых факторов.
Найти оптимальные пропорции выпуска различных моделей (какую часть от общего объема следует отдать на выпуск той или иной модели) в ситуациях:

1. Поведение рынка неизвестно.
2. Известно, что вектор описывающий частоту пребывания рынка в том или ином состоянии имеет вид

(20-N1+0,5N2)/(40-2N1+3N2) , (10-N1+1,5N2)/(40-2N1+3N2) , (10+N2)/(40-2N1+3N2)

N1=3, N2=1

Решение. Сначала для значений N1=3, N2=1 выпишем платежную матрицу игры и вектор вероятностей. Получим:

	I	II	III
A	30,5	23,5	22,6
B	19,1	27,4	24,5
C	20,7	22,6	25,5

P	35/74	17/74	11/37

Часть 1. Рассмотрим данную ситуацию как антагонистическую игру с заданной платежной матрицей A:

30,5	23,5	22,6
19,1	27,4	24,5
20,7	22,6	25,5

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим α_i. Получаем:

$\alpha_1 = 22,6,\ \alpha_2 = 19,1,\ \alpha_3 = 20,7$.

Выберем максимальное из этих значений $\alpha = 22,6$ - нижняя цена игры.

Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам:

$\beta_1 = 30,5,\ \beta_2 = 27,4,\ \beta_3 = 25,5$.

Минимальное из этих чисел $\beta = 25,5$ - верхняя цена игры.

Стратегии	B1	B2	B3	α_j
A1	30,5	23,5	22,6	**22,6**
A2	19,1	27,4	24,5	19,1
A3	20,7	22,6	25,5	20,7
β_i	30,5	27,4	**25,5**	

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях, цена игры находится в промежутке от 22,6 до 25,5 (между нижней и верхней ценой игры).

Теперь найдем решение игры, заданной данной платежной матрицей в смешанных стратегиях. Перейдем к задаче линейного программирования. Пусть $P = (p1, p2, p3)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока, $Q = (q1, q2, q3)$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока.

Составим пару симметричных двойственных задач, так чтобы исходная задача была стандартной задачей максимизации, матрица коэффициентов совпадала с платежной матрицей A, а коэффициенты при неизвестных в целевой функции и свободные члены неравенств были бы равны единице.

Для первого игрока получаем задачу:

$$G(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$
$$30,5x_1 + 19,1x_2 + 20,7x_3 \ge 1,$$
$$23,5x_1 + 27,4x_2 + 22,6x_3 \ge 1,$$
$$22,6x_1 + 24,5x_2 + 25,5x_3 \ge 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Для второго игрока получаем задачу:

$$F(Y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$
$$30,5y_1 + 23,5y_2 + 22,6y_3 \le 1,$$
$$19,1y_1 + 27,4y_2 + 24,5y_3 \le 1,$$
$$20,7y_1 + 22,6y_2 + 25,5y_3 \le 1,$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Здесь $F_{\max} = \frac{1}{\nu}$, $y_i = \frac{q_i}{\nu}$, $x_i = \frac{p_i}{\nu}$, ν - цена игры.

Решаем данные задачи и находим:
$y_1 \approx 0,007$, $y_2 \approx 0,008$, $y_3 = 0,026$, $F_{\max} \approx 0,041$,
$x_1 \approx 0,016$, $y_2 \approx 0,010$, $y_3 = 0,015$, $G_{\min} \approx 0,041$,

Поэтому цена игры $\nu = \frac{1}{F_{\max}} \approx 24,13$.

Смешанные стратегии второго игрока:
$Q = vY = 24,13(0,007;0,008;0,026) = (0,171;0,190;0,638)$

Смешанные стратегии первого игрока:
$P = vX = 24,13(0,016;0,010;0,015) = (0,390;0,245;0,366)$.

Таким образом, если рассматривать предприятие как игрока с тремя стратегиями производства (выпуск моделей обуви А, В, С), то следует наладить производство этих моделей в соотношении $P = (0,390;0,245;0,366)$ - 39% моделей типа А, 24,5% моделей типа В и 36,5% моделей типа С.
Средний выигрыш составит 24,13.

Часть 2. Рассмотрим ситуацию как игру с природой.

Так как известно, что вектор описывающий частоту пребывания рынка в том или ином состоянии, имеет вид:

P	35/74	17/74	11/37

можно использовать критерий максимального среднего выигрыша.

Формулы для расчета имеют вид:
$K(A_i) = M(A_i) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} p_j$, $i = 1,\dots,m.$, $K_{опт} = \max\{K(A_i),\ i = 1,\dots,m\}$.

Получаем:

	I	II	III	средний выигрыш $K(A_i)$
A_1	30,5	23,5	22,6	**26,543**
A_2	19,1	27,4	24,5	**22,612**
A_3	20,7	22,6	25,5	**22,564**
P	35/74	17/74	11/37	

Тогда $K_{\hat{i}\ddot{i}\grave{o}} = \max\left\{K\left(A_i\right),\ i=1,\ldots,m\right\} = 26,543$.

Лучшая стратегия по этому критерию A_1 (производить только модели типа А), средний выигрыш составит 26,543.

Для наиболее полного исследования ситуации рассмотрим еще несколько распространенных критериев.

Критерий Вальда. Это *максиминный критерий,* он гарантирует определенный выигрыш при наихудших условиях. Критерий основывается на том, что, если состояние обстановки неизвестно, нужно поступать самым осторожным образом, ориентируясь на минимальное значение эффективности каждой системы.

В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок систем по различным состояниям обстановки $K\left(A_i\right) = \min\limits_j k_{ij}$, $i=1,\ldots,m$.

Оптимальной считается система из строки с максимальным значением эффективности: $K_{опт} = \max\left\{K\left(A_i\right),\ i=1,\ldots,m\right\}$

Вычисляем:

	I	II	III	$K\left(A_i\right)$
A_1	30,5	23,5	22,6	**22,6**
A_2	19,1	27,4	24,5	**19,1**
A_3	20,7	22,6	25,5	**20,7**

Лучшая стратегия по этому критерию A_1 с выигрышем 22,6.

Критерий Севиджа._Минимизирует потери эффективности при наихудших условиях. Для оценки систем на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок эффективности в столбце: $\Delta k_{ij} = \max\limits_i k_{ij} - k_{ij}$.

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:
$K\left(A_i\right) = \max\limits_j \Delta k_{ij}$, $i=1,\ldots,m$, $K_{опт} = \min\left\{K\left(A_i\right),\ i=1,\ldots,m\right\}$

Матрице эффективности A

30,5	23,5	22,6
19,1	27,4	24,5
20,7	22,6	25,5

будет соответствовать матрица потерь:

0	3,9	2,9
11,4	0	1
9,8	4,8	0

Вычисляем теперь:

	I	II	III	$K(A_i)$
A_1	0	3,9	2,9	**3,9**
A_2	11,4	0	1	**11,4**
A_3	9,8	4,8	0	**9,8**

Лучшая стратегия по этому критерию A_1 с минимальным риском.

Таким образом, если рассматривать ситуацию как игру с природой, рекомендуется выбирать стратегию A_1, что подтверждается несколькими критериями.