Решенная контрольная работа
Полное исследование функции по схеме

Исследовать функцию:

1. *Найти область определения функции*
2. *Найти координаты точек пересечения с осями координат*
3. *Чётность, нечётность функции*
4. *Найти асимптоты и пределы на плюс, минус бесконечности*
5. *Определить критические точки*
6. *Определить интервалы монотонности и точки экстремума*
7. *Определить промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба*
8. *Найти дополнительные точки, если нет асимптот*
9. *Построить график, обозначить точки максимума и минимума*
10. *Определить область значения функции*

Функция:

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 4}$$

Решение.

1. Область определения функции:

$$x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$$

2. Найдем координаты точек пересечения с осями координат

ось Ox: $y = 0$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 4} = 0$$

$$x = \pm 3$$

ось Oy: $x = 0$

$$y = \frac{0 - 9}{0 - 4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

3. Чётность, нечётность функции

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 9}{-x - 4} = \frac{x^2 - 9}{-x - 4}$$

$y(-x) \neq -y(x)$, функция не является нечетной.

$y(-x) \neq y(x)$, функция не является четной.

4. Найти асимптоты и пределы на плюс, минус бесконечности

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9}{x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{9}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{9}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1}=+\infty$$

Так как оба предела бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Функция терпит разрыв в точке $x=4$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

$$\lim_{x\to4-0}\frac{x^2-9}{x-4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to4+0}\frac{x^2-9}{x-4}=+\infty$$

$x=4$ - бесконечный разрыв, прямая $x=4$ - вертикальная асимптота.

Исследуем на наличие наклонных асимптот:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9}{x^2-4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1=k$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-9}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x-9}{x-4}\right)=4=b$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x^2-4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1=k$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-9}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-9}{x-4}\right)=4=b$$

$y=kx+b=x+4$ - наклонная асимптота.

5. Определим критические точки

$$y' = \left(\frac{x^2-9}{x-4}\right)' = \frac{2x(x-4)-(x^2-9)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$

$$y' = 0$$

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

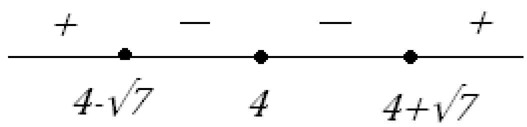
$$x = 4 \pm \sqrt{7}$$

Также критической точкой является $x = 4$, так как в этой точке производная не определена.

6. Определить интервалы монотонности и точки экстремума

Для этого найдем знаки производной методом интервалов:

$$y' = \frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$



При $x \in (-\infty; 4-\sqrt{7}), (4+\sqrt{7};\ +\infty)$ функция возрастает, при $x \in (4-\sqrt{7}; 4), (4; 4+\sqrt{7})$ функция убывает.

$x = 4-\sqrt{7}$ - точка максимума, $x = 4+\sqrt{7}$ - точка минимума

$$x = 4-\sqrt{7} \approx 1{,}35; y(4-\sqrt{7}) = 2.71$$

$$x = 4+\sqrt{7} \approx 6.65; y(4+\sqrt{7}) = 13.29$$

7. Определить промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2-8x+9)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{2(x-4)^2 - 2(x^2-8x+9)}{(x-4)^3} = 2\frac{x^2-8x+16-x^2+8x-9}{(x-4)^3} =$$

$$= \frac{14}{(x-4)^3}$$

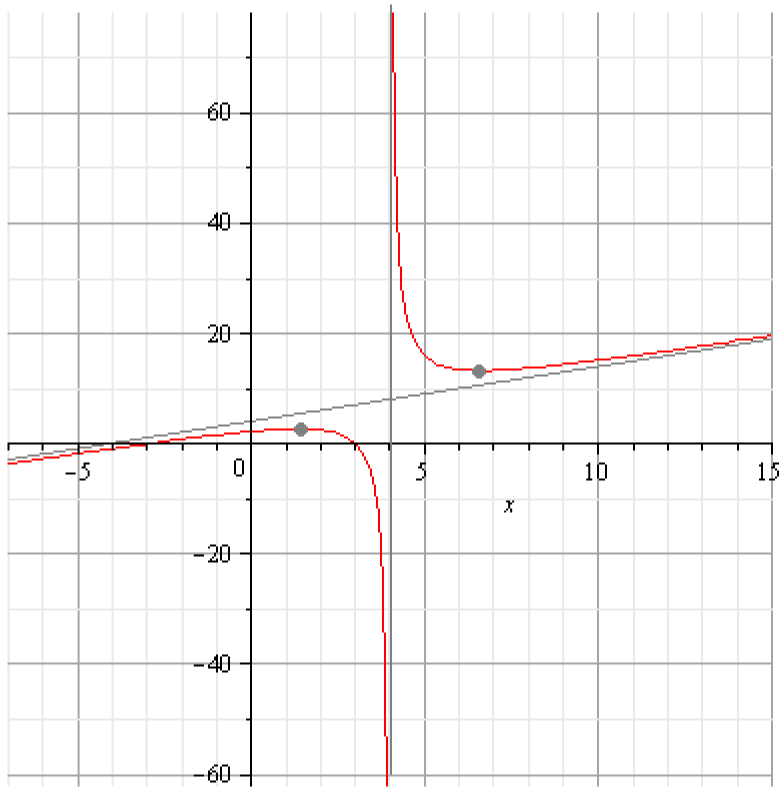
$y'' > 0$ при $x > 4$; $y'' < 0$ при $x < 4$

При $x \in (-\infty; 4)$ функция выпуклая, при $x \in (4; +\infty)$ - вогнутая, точек перегиба нет, так как нет точек, в которых $y'' = 0$

8. Найти дополнительные точки

x	y
-3	0,00
-2	0,83
-1	1,60
0	2,25
1	2,67
2	2,50
3	0,00
5	16,00
6	13,50
7	13,33
8	13,75

9. Построим график:



10. Видно, что для левой ветки гиперболы $y \leq y(x_{max})$, для правой ветки - $y \geq y(x_{min})$

$$y(4-\sqrt{7}) = \frac{(4-\sqrt{7})^2 - 9}{4-\sqrt{7}-4} = \frac{16-8\sqrt{7}+7-9}{-\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}-14}{\sqrt{7}} = \\ = 8-2\sqrt{7}$$

$$y(4+\sqrt{7}) = \frac{(4+\sqrt{7})^2 - 9}{4+\sqrt{7}-4} = \frac{16+8\sqrt{7}+7-9}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}+14}{\sqrt{7}} = \\ = 8+2\sqrt{7}$$

Таким образом, область значений функции:

$$y \in \left(-\infty;\ 8-2\sqrt{7}\right) \cup \left(8+2\sqrt{7}; +\infty\right)$$