Решенная контрольная работа
Исследование функции и построение графика

Провести исследование и построить график функции.

Задание 1.

$y = x(x^2 - 1)$

Решение.

1. Область определения функции

   Функция непрерывна.

   $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2. Периодичность.

$y(x+t) = (x+t)((x+t)^2 - 1) \neq y(x)$

Функция не является периодической.

3. Чётность, нечётность функции

$$y(-x) = -x((-x)^2 - 1) = -x(x^2 - 1) = -y(x)$$

Функция является нечетной. Ее график симметричен относительно начала координат.

4. Точки пересечения графика функции с осями координат; интервалы знакопостоянства функции; точки разрыва.

$y(0) = 0(0^2 - 1) = 0$

$y(x) = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, x = -1, x = 1$

Функция пересекает оси координат в точках (0; 0), (–1; 0), (1; 0).

Функция не имеет точек разрыва.

Найдем производную функции.

$y' = (x(x^2 - 1))' = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$

$y' = 0$

$3x^2 - 1 = 0$

$3x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,6$

Интервалы знакопостояноства функции:

$$\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$$

5. Асимптоты, поведение функции на границах области определения.

Вертикальных асимптот нет, т.к. функция непрерывна

Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to\infty}(x^2-1) = \infty$$

Наклонных асимптот нет.

Найдем пределы функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to-\infty} x(x^2-1) = \lim_{x\to-\infty}(x^3-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x(x^2-1) = \lim_{x\to+\infty}(x^3-x) = +\infty$$

6. Промежутки возрастания и убывания функции, точки локального экстремума.

Точки экстремума – это точки, в которых производная равна нулю. Эти точки были найдены в пункте 4.

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}6$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}6$$

Функция возрастает при $y' > 0$ и убывает при $y' < 0$.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	↗	max	↘	min	↗

Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Функция убывает на промежутке $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$y_{\max} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}4$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}4$$

7. Направление выпуклости графика функции; точки перегиба.

Найдем вторую производную.

$y'' = (3x^2 - 1)' = 6x$

$y'' = 0$

$x = 0$

Это точка перегиба.

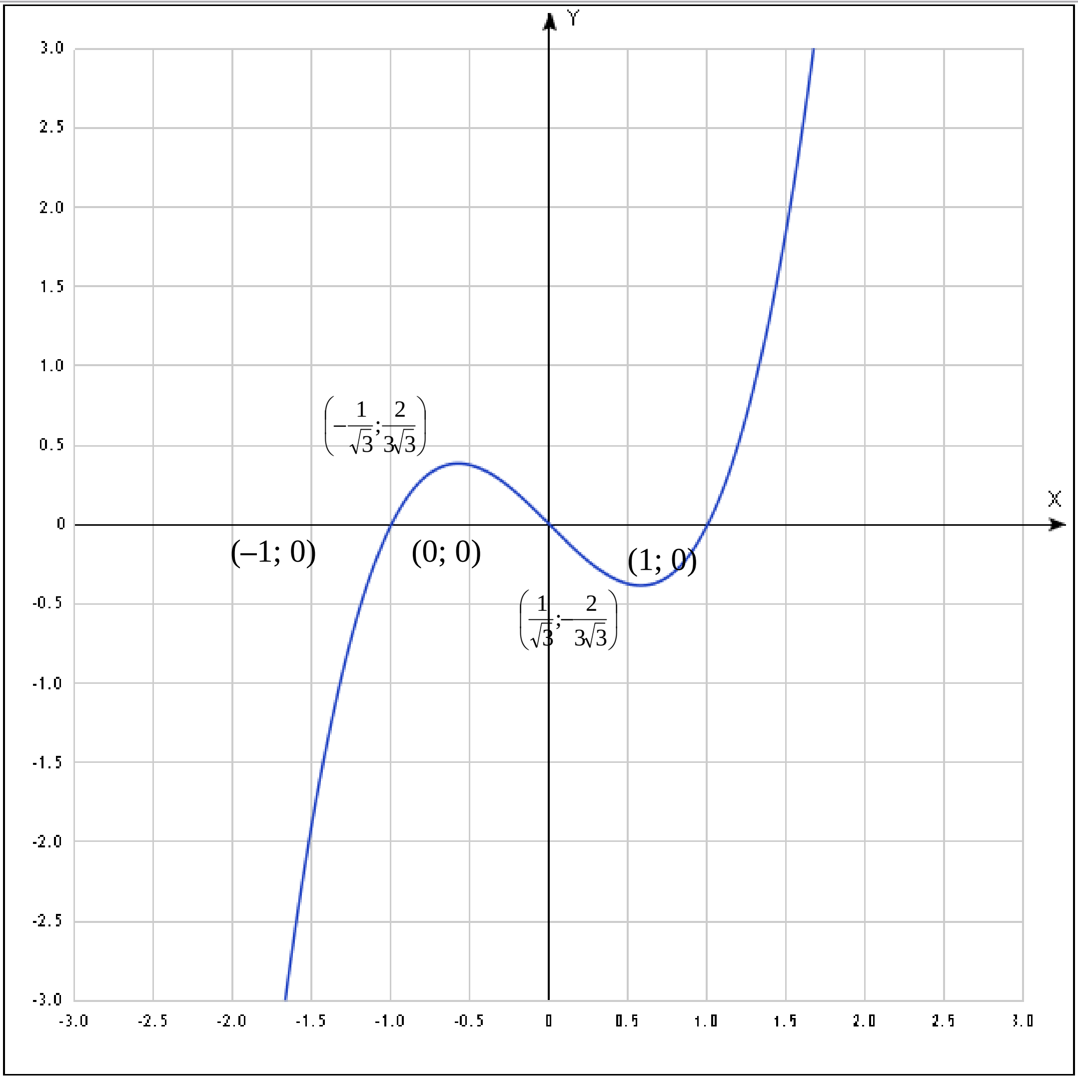
Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

В интервале $(-\infty; 0)$ кривая выпуклая.

В интервале $(0; +\infty)$ кривая вогнутая.

8. Построим график функции по исследованию 1-7.



9. Определение области значений по графику функции.

$E(y) = (-\infty; +\infty)$

Задание 2.

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

Решение.

1. Область определения функции

Функция разрывная в точке $x = 1$.

$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. Периодичность.

$$y(x+t)=\frac{(x+t)^2-2(x+t)}{x+t-1}\neq y(x)$$

Функция не является периодической.

3. Чётность, нечётность функции

$$y(-x)=\frac{(-x)^2+2x}{-x-1}=-\frac{x^2+2x}{x+1}\neq y(x)\neq -y(x)$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Точки пересечения графика функции с осями координат; интервалы знакопостоянства функции; точки разрыва.

$$y(0)=\frac{0^2-2\cdot 0}{0-1}=0$$

$$y(x)=0$$

$$\frac{x^2-2x}{x-1}=0$$

$$\frac{x(x-2)}{x-1}=0$$

$$x=0; x=2$$

Функция пересекает оси координат в точках (0; 0), (2; 0).

Функция разрывная в точке $x = 1$.

Найдем производную функции.

$$y'=\frac{(x^2-2x)'(x-1)-(x^2-2x)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}\neq 0$$

Производная не равна нулю.

Интервалы знакопостояноства функции:

$(-\infty;1)\quad(1;+\infty)$

5. Асимптоты, поведение функции на границах области определения.

Функция разрывная в точке $x = 1$. Это уравнение вертикальной асимптоты.

Уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}=-1$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = x - 1$

Найдем пределы функции на бесконечности и в окрестностях точки $x = 1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{(1-0)^2-2(1-0)}{1-0-1}=\frac{1-2}{-0}=\frac{-1}{-0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{(1+0)^2-2(1+0)}{1+0-1}=\frac{1-2}{+0}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

6. Промежутки возрастания и убывания функции, точки локального экстремума.

Точки экстремума – это точки, в которых производная равна нулю. Производная была найдены в пункте 4. Она не равна нулю.

$$y'=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}\neq 0$$

Точек экстремума функция не имеет, но имеет точку разрыва $x = 1$

Функция возрастает при $y'>0$ и убывает при $y'<0$.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
$y'(x)$	+	Не сущ.	+
$y(x)$	↗	Не сущ.	↗

Функция возрастает на промежутках $(-\infty;1)$ $(1;+\infty)$

Точек локального экстремума функция не имеет.

7. Направление выпуклости графика функции; точки перегиба.

Найдем вторую производную.

$$y' = \frac{(x^2-2x+2)'(x-1)^2-(x^2-2x+2)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}$$

Точек перегиба функция не имеет.

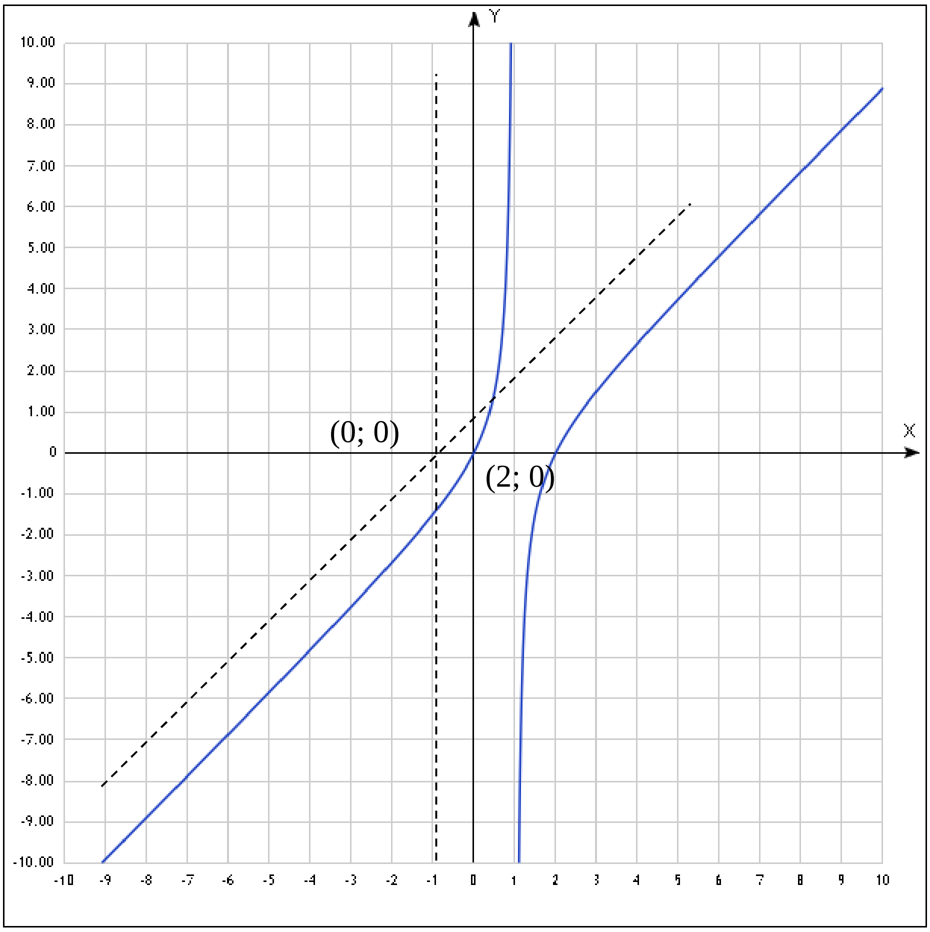
Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	+	Не сущ.	–
y	$\cup$	Не сущ.	$\cap$

В интервале $(-\infty;1)$ кривая вогнутая.

В интервале $(1;+\infty)$ кривая выпуклая.

8. Построим график функции по исследованию 1-7.



9. Определение области значений по графику функции.

$E(y) = (-\infty;+\infty)$