Контрольная работа
Применение определенного интеграла

Задача 1.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = x^2 + 2x; \quad y - 2x = 1.$

Решение.
$y = x^2 + 2x -$ квадратичная функция, график – парабола; координаты вершины:
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -1; \; y_0 = y(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1$, ветви направлены вверх.

Дополнительные точки:

x	0	1	2
y	0	3	8

$y - 2x = 1; \; y = 2x + 1$ - линейная функция, график – прямая.

x	0	-1
y	1	-1

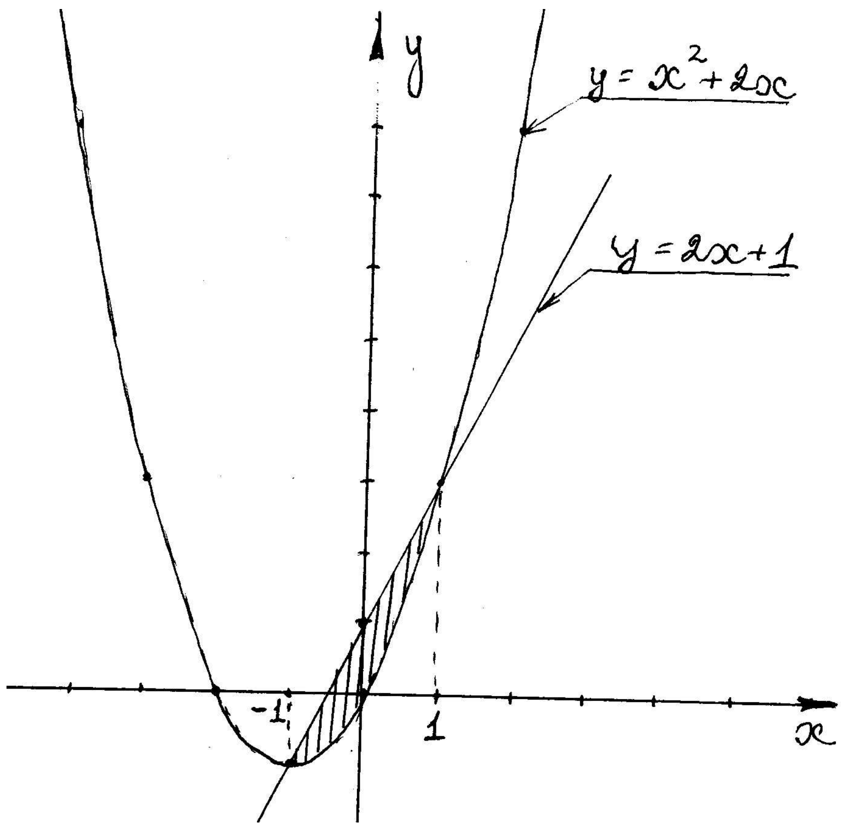
Найдем точки пересечения данных линий:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$$

$x^2 + 2x = 2x + 1$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$ (пределы интегрирования)



Таким образом, искомая фигура представляет собой множество точек на промежутке $x \in [-1; 1]$, ограниченной сверху линией $y = 2x + 1$, а снизу – линией $y = x^2 + 2x$.

Найдем площадь фигуры:

$$S = \int_{-1}^{1} (2x + 1 - x^2 - 2x)dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Ответ. $\frac{4}{3}$.

Задача 2.
Найти площадь фигуры, ограниченной линией:
$r = 3\sin^2 \varphi$
Решение.
Можно считать, что искомая фигура ограничена полупрямыми $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.
Найдем площадь по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 9\sin^4 \varphi d\varphi = \frac{9}{2}\int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)d\varphi =$$

$$=\frac{9}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi-\frac{9}{8}\cdot 2\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi+\frac{9}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2 2\varphi\, d\varphi=$$

$$\frac{9}{8}\cdot 2\pi-\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{9}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{9}{4}\pi+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 4\varphi d\varphi=\frac{9}{4}\pi+\frac{9}{8}\pi+\frac{9}{16}\cdot\left(\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{27\pi}{8}$$

Ответ. $\frac{27\pi}{8}$.

Задача 3.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x=\sin^3 t,\ x=0,\ x>0, \\ y=8\cos^3 t,\ y=0,\ y>0. \end{cases}$$

Решение.
Сначала рассмотрим фигуру, которую ограничивает заданная линия, если параметр t, если $t\in[0;2\pi]$. Обход вдоль кривой ведется по часовой стрелке, значит, площадь вычисляется по следующей формуле:

$$S_0=-\int_0^{2\pi}x(t)y'(t)dt=-\int_0^{2\pi}\sin^3 t\cdot 8\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt=24\int_0^{2\pi}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt=$$

$$=24\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt=24\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t\right)\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=24\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{1}{8}\cos^2 2t+\frac{1}{8}\cos^3 2t\right)dt=24\cdot\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt=$$

$$=3\int_0^{2\pi}dt-3\int_0^{2\pi}\cos 2tdt-3\int_0^{2\pi}\cos^2 2tdt+3\int_0^{2\pi}\cos^3 2tdt=$$

$$=3\cdot 2\pi-3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d(\sin 2t)-3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}dt+$$

$$+3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 2t\right)d\left(\sin 2t\right)=6\pi-\frac{3}{2}\cdot\left(\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}-3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dt-3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 4tdt+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\left(\sin 2t\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2td\left(\sin 2t\right)=6\pi-0-\frac{3}{2}\cdot 2\pi-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{3}{2}\cdot\left(\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=6\pi-3\pi=3\pi$$

Т.к. искомая фигура ($x>0; y>0$) представляет собой лишь четверть вышеописанной фигуры, то чтобы получить ответ, нужно найденную площадь разделить на 4:

$$S=\frac{S_0}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

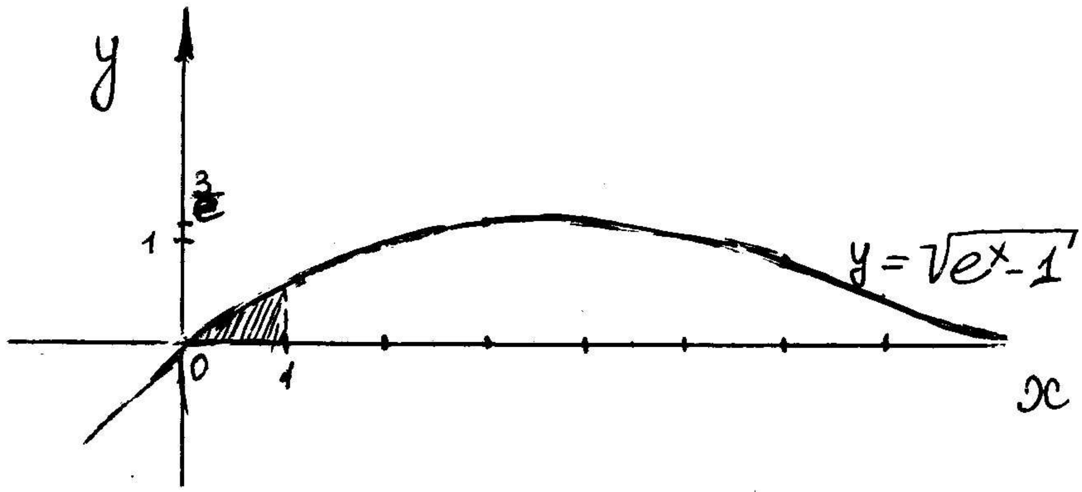
Ответ. $\frac{3\pi}{4}$.

Задача 4.

Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX:

$y=\sqrt{e^x-1}$, $[0;1]$; $y=0$; $x=1$.

Решение.



Пределы интегрирования:

$x\in[0;1]$

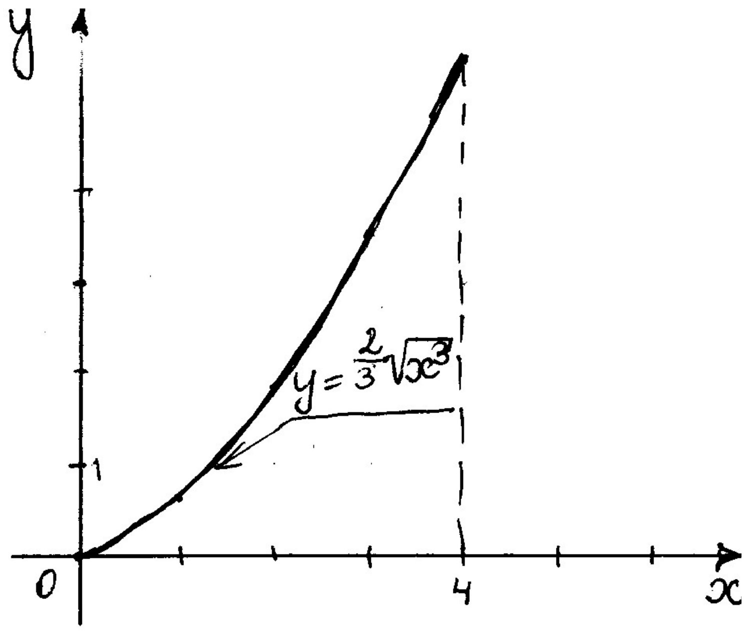
Найдем объем по формуле:

$$V=\pi\int_0^1 y^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(e^x-1\right)dx=\pi\cdot\left(e^x-x\right)\Big|_0^1=\pi\cdot(e-1-1)=\pi\cdot(e-2)$$

Ответ. $\pi(e-2)$.

Задача 5.
Найти длину кривой, заданной уравнением:
$y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $0\le x\le 4$.

Решение.



Найдем производную функции $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)}{dx}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

Найдем длину кривой по формуле:

$$L=\int_0^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+x}\,dx=\int_1^5\sqrt{x}\,dx=\left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_1^5=\frac{2\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$$

Ответ. $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$.

Задача 6.
Найти длину кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases}x=2(t-\cos t),\\ y=2(1-\sin t).\end{cases}\quad 0\le t\le\pi.$$

Решение.
Найдем производные функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(2t-2\cos t)}{dt}=2+2\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{d(2-2\sin t)}{dt}=-2\cos t$$

Найдем длину кривой:

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{(2+2\sin t)^2+(-2\cos t)^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{4+8\sin t+4\sin^2 t+4\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4+8\sin t+4}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{8+8\sin t}dt=2\cdot 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin t}dt=\left|\begin{matrix}x=\sin t\\ dt=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{matrix}\right|=$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=4\sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=4\sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=4\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_0^1=$$

$$4\sqrt{2}\cdot 2=8\sqrt{2}$$

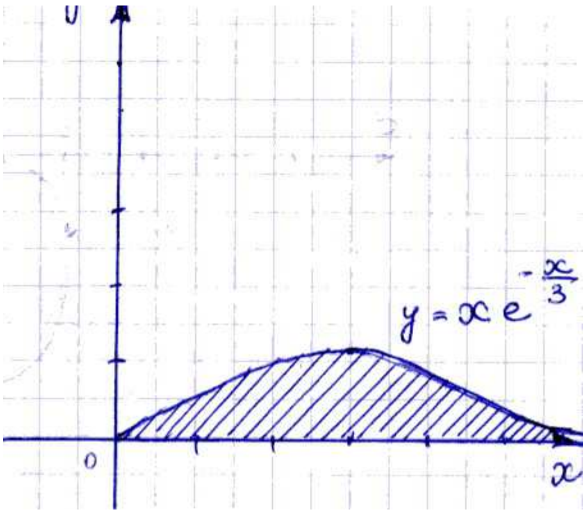
Ответ. $8\sqrt{2}$.

Задача 7.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=xe^{-\frac{x}{3}}, \quad x=0;\ y=0.$

Решение.



Фигура представляет собой множество точек на всей положительной полуоси OX, ограниченных снизу прямой $y=0$, а сверху – линией $y=xe^{-\frac{x}{3}}$. Запишем интеграл:

$$S=\int_0^{+\infty}\left(xe^{-\frac{x}{3}}-0\right)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot(-3)d\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)=-3\int_0^{+\infty}xd\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)=-3\cdot\left(\lim_{a\to+\infty}\left(x\cdot e^{-\frac{x}{3}}\right)\Bigg|_0^a-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{3}}dx\right)=$$

$$=-3\cdot\left(\lim_{a\to+\infty}\left(x\cdot e^{-\frac{x}{3}}\right)-\lim_{a\to+\infty}\left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)\Bigg|_0^a\right)=-3\cdot(0-3)=9$$

Ответ. 9

Задача 8.

Найти силу давления воды на вертикально погруженную в нее пластину, если пластина имеет форму полукруга радиуса $R=4ì$ *и диаметр полукруга находится на поверхности воды.*

Решение.

Возьмем следующую систему отсчета: центр координат – центр диаметра пластины, ось OX направлена вдоль диаметра, ось OY - направлена вертикально вниз.

На каждую точку пластины, погруженную на глубину h, действует сила, равная $\rho\cdot g\cdot h$, где ρ - плотность воды, g - ускорение свободного падения. Пластина представляет собой множество точек на промежутке $x\in[-R;R]$. Причем по y эти точки ограничены снизу нулем, а сверху – линией $\sqrt{R^2-x^2}$.

Найдем длину стержня, представляющего собой множество точек пластины, погруженных на глубину h:

$l(h)=2\sqrt{R^2-h^2}$

Найдем силу давления:

$$F=\int_0^R l\cdot\rho\cdot g\cdot hdh=2\int_0^R\sqrt{R^2-h^2}\cdot\rho\cdot g\cdot hdh=\rho\cdot g\int_0^R\sqrt{R^2-h^2}d\left(h^2\right)=\rho\cdot g\int_0^R\sqrt{h^2}d\left(h^2\right)=$$

$$=\rho\cdot g\cdot\left(\frac{2}{3}\left(h^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^R=\frac{128}{3}\rho\cdot g$$

Ответ. $\frac{128}{3}\rho\cdot g$

Задача 9.

Вычислить работу, совершаемую при выкачивании воды из сосуда, имеющего форму полусферы радиуса $R=4ì$ *, обращенной вершиной вниз.*

Решение.

Возьмем некоторую малую часть жидкости объемом ΔV, находящуюся на расстоянии H от верхней грани сосуда. Тогда работа, которую необходимо затратить на выкачивание этой частицы, равна $\Delta V\cdot\rho\cdot g\cdot H$, где ρ - плотность воды, g - ускорение свободного падения.

Возьмем систему отсчета, в которой центр координат – центр верхней окружности сосуда, оси OX и OY лежат в плоскости, содержащей верхнюю окружность сосуда, ось OZ направлена вертикально вниз.

Найдем площадь круга, представляющего собой множество точек сферы, находящихся на расстоянии h от верхней грани полусферы:

$$S(h)=\pi\cdot\left(\sqrt{R^2-h^2}\right)^2=\pi\left(R^2-h^2\right)$$

Запишем работу, необходимую для выкачивания всей жидкости:

$$A=\int_0^R S\cdot\rho\cdot g\cdot hdh=\pi\cdot\rho\cdot g\int_0^R\left(R^2-h^2\right)hdh=\pi\cdot\rho\cdot g\cdot\left.\left(\frac{R^2h^2}{2}-\frac{h^4}{4}\right)\right|_0^R=\pi\cdot\rho\cdot g\cdot\frac{R^4}{4}=$$

$$=64\pi\cdot\rho\cdot g$$

Ответ. $64\pi\cdot\rho\cdot g$.

Задача 10.

Найти координату центра масс неоднородного стержня, расположенного на отрезке $0\le x\le 2$, *если его плотность равна* $\rho(x)=\rho_0\cdot\left(x^2+2x\right)$, $\rho_0=const$.

Решение.

Пусть точка x_0 - координата центра масс стержня. Тогда выполняется соотношение:

$$\int_0^{x_0}\rho(x)\overline{xx_0}dx=\int_{x_0}^2\rho(x)\overline{xx_0}dx$$

$$\int_0^{x_0}\rho_0\cdot\left(x^2+2x\right)\cdot\left(x_0-x\right)dx=\int_{x_0}^2\rho_0\cdot\left(x^2+2x\right)\cdot\left(x-x_0\right)dx$$

$$\int_0^{x_0}\left(-x^3+x^2\cdot\left(x_0-2\right)+x\cdot 2x_0\right)dx=\int_{x_0}^2\left(x^3+x^2\cdot\left(2-x_0\right)-x\cdot 2x_0\right)dx$$

$$-\frac{x_0^4}{4}+\frac{x_0^3}{3}\cdot\left(x_0-2\right)+x_0^2\cdot x_0=\frac{2^4-x_0^4}{4}+\frac{2^3-x_0^3}{3}\cdot\left(2-x_0\right)-\left(2^2-x_0^2\right)\cdot x_0$$

$$0=4+\frac{8}{3}\cdot\left(2-x_0\right)-4x_0$$

Отсюда следует, что:

$$x_0=\frac{4+\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}+4}=\frac{12+16}{8+12}=\frac{28}{20}=\frac{7}{5}.$$

Ответ. $\frac{7}{5}$.