Контрольная работа по численным методам с решением

Задание 1. На отрезке [0;2] методом Ньютона найти корень уравнения $-x^3-2x^2-4x+10=0$ с точностью 0,01.

Решение:

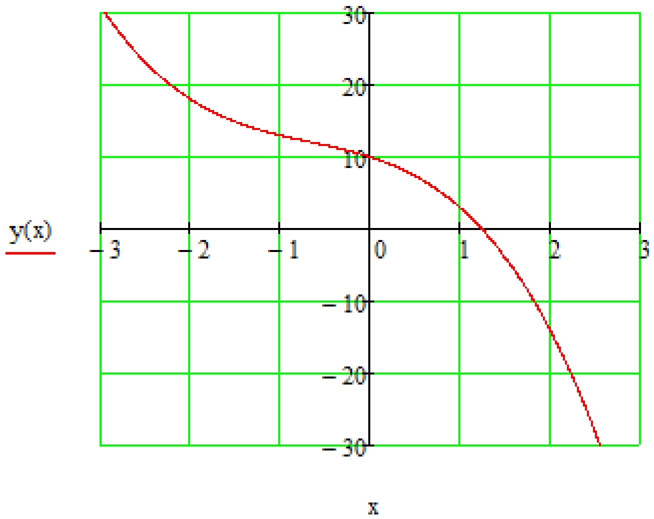

График функции

Условие сходимости метода Ньютона:

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0,$$

где $x_0=2$ – начальное приближение, конец интервала.

Проверяем:

$f(2)=-14$,

$f'(x)=-3x^2-4x-4$, $f''(x)=-6x-4$, $f''(2)=-16$,

$f(2)\cdot f''(2)=(-14)\cdot(-16)>0$, значит, метод Ньютона сходится.

Последовательность итерации для метода Ньютона:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Критерий сходимости:

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon.$$

Итак, находим решение:

<u>1 итерация:</u> $x_0=2$, $f(2)=-14$, $f'(2)=-24$,

$x_1=2-\frac{(-14)}{(-24)}\approx 1.417$, $|x_1-x_0|=0.583>\varepsilon=0.01$.

<u>2 итерация:</u> $x_1=1.417$, $f(1.417)\approx -2.529$, $f'(1.417)=-15.692$,

$$x_2 = 1.417 - \frac{(-2.529)}{(-15.692)} \approx 1.256,\ |x_2 - x_1| = 0.161 > \varepsilon = 0.01.$$

3 итерация: $x_2 = 1.256$, $f(1.256) \approx -0.16$, $f'(1.256) = -13.757$,

$$x_3 = 1.256 - \frac{(-0.16)}{(-13.757)} \approx 1.244,\ |x_3 - x_2| = 0.012 > \varepsilon = 0.01.$$

4 итерация: $x_3 = 1.244$, $f(1.244) \approx 0.0038$, $f'(1.244) = -13.619$,

$$x_4 = 1.244 - \frac{0.0038}{(-13.619)} \approx 1.2442,\ |x_4 - x_3| = 0.0001 < \varepsilon = 0.01.$$

Ответ: $x = 1.2442$.

Задание 2. Методом хорд найти отрицательный корень уравнения $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$ с точностью 0,0001. Требуется предварительное построение графика функции и отделение корней.

Решение:

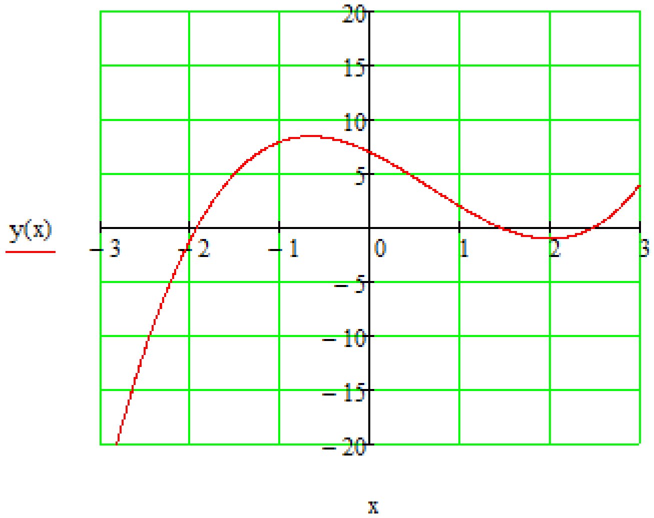

График функции

Первый отрицательный корень находится в интервале [-2; -1]. Уточним корень уравнения методом хорд.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}(b - x_{n-1}),\ \text{если}\ f(x_n)\cdot f(b) < 0$$

$$x_n = a - \frac{f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a),\ \text{если}\ f(x_n)\cdot f(a) < 0.$$

Критерий сходимости:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Итак, выберем $x_0 = -2$, $f(a) = f(-2) = -1$, $f(b) = f(-1) = 8$.

1 итерация: $f(-2) = -1$, $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, тогда

$$x_1 = -2 - \frac{-1}{8+1}(-1+2) \approx -1.88889, \ |x_1 - x_0| = 0.1111 > \varepsilon = 0.0001$$

2 итерация: $f(-1.88889) = 0.68037$, $f(x_1) \cdot f(a) < 0$, тогда

$$x_2 = -2 - \frac{-1}{0.68037+1}(-1.88889+2) \approx -1.93388,$$

$$|x_2 - x_1| = 0.04499 > \varepsilon = 0.0001.$$

3 итерация: $f(-1.93388) = 0.023234$, $f(x_1) \cdot f(a) < 0$, тогда

$$x_3 = -2 - \frac{-1}{0.023234+1}(-1.93388+2) \approx -1.93538,$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0015 > \varepsilon = 0.0001.$$

4 итерация: $f(-1.93538) = 0.00078$, $f(x_1) \cdot f(a) < 0$, тогда

$$x_4 = -2 - \frac{-1}{0.00078+1}(-1.93538+2) \approx -1.93543,$$

$$|x_4 - x_3| = 0.00005 < \varepsilon = 0.0001.$$

Ответ: $x = -1.9354$.

Задание 3. Определить значения корней системы уравнений методом Зейделя:

$$\begin{cases} 0.68x_1 + 0.05x_2 - 0.11x_3 = 2.20319 \\ 0.21x_1 - 0.13x_2 + 0.27x_3 = -0.09509 \\ -0.11x_1 - 0.84x_2 + 0.28x_3 = -0.99454 \end{cases}$$

Решение:

Выберем точность $\varepsilon = 0.001$.

Прежде чем применять метод, необходимо переставить строки исходной системы таким образом, чтобы на диагонали стояли наибольшие по модулю коэффициенты матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0.68 & 0.05 & -0.11 \\ 0.21 & -0.13 & 0.27 \\ -0.11 & -0.84 & 0.28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.68 & 0.05 & -0.11 \\ -0.11 & -0.84 & 0.28 \\ 0.21 & -0.13 & 0.27 \end{pmatrix}$$

Система итерационных уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{0.68}\left(2.20319 - 0.05x_2^{(k)} + 0.11x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{0.84}\left(-0.99454 + 0.11x_1^{(k+1)} - 0.28x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{0.27}\left(-0.09509 - 0.21x_1^{(k+1)} + 0.13x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Условие окончания итерационного процесса: $\max\limits_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$.

Выберем начальное (нулевое) приближение $x_i^{(0)} = 0$. Дальнейшие вычисления оформим в виде таблицы:

k	x_1	x_2	x_3	$\max\limits_i \left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\| < \varepsilon$
0	0	0	0	
1	3,2400	0,7597	-2,5064	3,2400
2	2,7787	-0,0154	-2,5208	-0,0144
3	2,8333	-0,0273	-2,5690	0,0547
4	2,8264	-0,0425	-2,5710	-0,0019
5	2,8272	-0,0432	-2,5720	0,0008

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 2.8272 \\ -0.0432 \\ -2.572 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Методом прямоугольников вычислить интеграл с шагом 0,02:

$$\int_{0.4}^{2.2} \frac{\sin\left(x^2 + 2.5\right) dx}{\left(x^3 + 3\right)}$$

Решение:

Используем для вычисления интеграла формулу средних прямоугольников. Для этого разобьем отрезок интегрирования [0.4,2.2] на равные части с шагом h=0.02. Вычислим значения подынтегральной функции $y_i = \dfrac{\sin\left(x_i^2 + 2.5\right)}{\left(x_i^3 + 3\right)}$ в полуцелых точках разбиения $x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2$.

x_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$

0,4		
0,42	0,41	0,1486
0,44	0,43	0,1432
0,46	0,45	0,1375
0,48	0,47	0,1316
0,5	0,49	0,1253
0,52	0,51	0,1188
0,54	0,53	0,1121
0,56	0,55	0,1051
0,58	0,57	0,0978
0,6	0,59	0,0903
0,62	0,61	0,0825
0,64	0,63	0,0745
0,66	0,65	0,0664
0,68	0,67	0,0580
0,7	0,69	0,0495
0,72	0,71	0,0408
0,74	0,73	0,0320
0,76	0,75	0,0231
0,78	0,77	0,0141
0,8	0,79	0,0050
0,82	0,81	-0,0041
0,84	0,83	-0,0132
0,86	0,85	-0,0224
0,88	0,87	-0,0314
0,9	0,89	-0,0405
0,92	0,91	-0,0494
0,94	0,93	-0,0582
0,96	0,95	-0,0669
0,98	0,97	-0,0754
1	0,99	-0,0836
1,02	1,01	-0,0917
1,04	1,03	-0,0995
1,06	1,05	-0,1070
1,08	1,07	-0,1142
1,1	1,09	-0,1210
1,12	1,11	-0,1275
1,14	1,13	-0,1336
1,16	1,15	-0,1392
1,18	1,17	-0,1445
1,2	1,19	-0,1493
1,22	1,21	-0,1536
1,24	1,23	-0,1574
1,26	1,25	-0,1607

1,28	1,27	-0,1635
1,3	1,29	-0,1658
1,32	1,31	-0,1676
1,34	1,33	-0,1688
1,36	1,35	-0,1694
1,38	1,37	-0,1695
1,4	1,39	-0,1690
1,42	1,41	-0,1680
1,44	1,43	-0,1664
1,46	1,45	-0,1643
1,48	1,47	-0,1617
1,5	1,49	-0,1585
1,52	1,51	-0,1549
1,54	1,53	-0,1507
1,56	1,55	-0,1460
1,58	1,57	-0,1409
1,6	1,59	-0,1354
1,62	1,61	-0,1295
1,64	1,63	-0,1232
1,66	1,65	-0,1165
1,68	1,67	-0,1095
1,7	1,69	-0,1022
1,72	1,71	-0,0947
1,74	1,73	-0,0869
1,76	1,75	-0,0789
1,78	1,77	-0,0708
1,8	1,79	-0,0626
1,82	1,81	-0,0544
1,84	1,83	-0,0461
1,86	1,85	-0,0378
1,88	1,87	-0,0296
1,9	1,89	-0,0215
1,92	1,91	-0,0135
1,94	1,93	-0,0057
1,96	1,95	0,0019
1,98	1,97	0,0092
2	1,99	0,0162
2,02	2,01	0,0228
2,04	2,03	0,0292
2,06	2,05	0,0351
2,08	2,07	0,0405
2,1	2,09	0,0455
2,12	2,11	0,0500
2,14	2,13	0,0540

2,16	2,15	0,0575
2,18	2,17	0,0605
2,2	2,19	0,0628
Сумма		**-3,9067**

По формуле прямоугольников получим:

$$I_1 = h\sum_i y_{i-1/2} = 0.02\cdot(-3.9067) = -0.0781.$$

Ответ: $\int\limits_{0.4}^{2.2} \frac{\sin(x^2+2.5)\,dx}{(x^3+3)} \approx -0.0781.$

Задание 5. Методом Эйлера-Коши найти решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ на интервале x = [0,2], начальные условия y(x=0) = 0. Шаг интегрирования h = 0.02.

Решение:

В методе Эйлера используются следующие рекуррентные формулы:

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i, y_i),\ \ x_i = a + i\cdot h,$$

где $f(x,y) = 1 + y^2$, $a = 0$, $b = 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.02$.

Так, для $i = 1$ имеем:

$x_1 = 0 + 1\cdot 0.02 = 0.02$,

$y_1 = 0 + 0.02\cdot(1+0^2) = 0.02$.

Для $i = 2$ имеем:

$x_2 = 0 + 2\cdot 0.02 = 0.04$,

$y_2 = 0.02 + 0.02\cdot(1+0.02^2) \approx 0.04001.$

Дальнейшие вычисления приведены в таблице:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0	0	34	0,68	0,80062	67	1,34	3,79584
1	0,02	0,02000	35	0,7	0,83344	68	1,36	4,10401
2	0,04	0,04001	36	0,72	0,86733	69	1,38	4,46087
3	0,06	0,06004	37	0,74	0,90237	70	1,4	4,87885
4	0,08	0,08011	38	0,76	0,93866	71	1,42	5,37492
5	0,1	0,10024	39	0,78	0,97628	72	1,44	5,97271
6	0,12	0,12044	40	0,8	1,01534	73	1,46	6,70618
7	0,14	0,14073	41	0,82	1,05596	74	1,48	7,62563
8	0,16	0,16113	42	0,84	1,09826	75	1,5	8,80864
9	0,18	0,18165	43	0,86	1,14239	76	1,52	10,38048

10	0,2	0,20231	44	0,88	1,18849	77	1,54	12,55556
11	0,22	0,22313	45	0,9	1,23674	78	1,56	15,72841
12	0,24	0,24412	46	0,92	1,28733	79	1,58	20,69606
13	0,26	0,26531	47	0,94	1,34047	80	1,6	29,28261
14	0,28	0,28672	48	0,96	1,39641	81	1,62	46,45202
15	0,3	0,30836	49	0,98	1,45541	82	1,64	89,62784
16	0,32	0,33027	50	1	1,51777	83	1,66	250,31081
17	0,34	0,35245	51	1,02	1,58384	84	1,68	1503,44089
18	0,36	0,37493	52	1,04	1,65401	85	1,7	46710,15106
19	0,38	0,39774	53	1,06	1,72873	86	1,72	43683474,41670
20	0,4	0,42091	54	1,08	1,80850	87	1,74	3,8165E+13
21	0,42	0,44445	55	1,1	1,89391	88	1,76	2,91313E+25
22	0,44	0,46840	56	1,12	1,98565	89	1,78	1,69726E+49
23	0,46	0,49279	57	1,14	2,08451	90	1,8	5,76141E+96
24	0,48	0,51765	58	1,16	2,19141	91	1,82	6,6388E+191
25	0,5	0,54301	59	1,18	2,30746	92	1,84	Не хватает точности (∞)
26	0,52	0,56890	60	1,2	2,43394	93	1,86	Не хватает точности (∞)
27	0,54	0,59538	61	1,22	2,57243	94	1,88	Не хватает точности (∞)
28	0,56	0,62247	62	1,24	2,72477	95	1,9	Не хватает точности (∞)
29	0,58	0,65022	63	1,26	2,89326	96	1,92	Не хватает точности (∞)
30	0,6	0,67867	64	1,28	3,08068	97	1,94	Не хватает точности (∞)
31	0,62	0,70788	65	1,3	3,29049	98	1,96	Не хватает точности (∞)
32	0,64	0,73790	66	1,32	3,52704	99	1,98	Не хватает точности (∞)
33	0,66	0,76879	67	1,34	3,79584	100	2	Не хватает точности (∞)

Задание 6. Дана таблица значений функции. Используя интерполяционный многочлен Ньютона вычислить значение функции при x = 0.077.

x	y
0.00	1.000
0.20	1.179
0.40	1.310
0.60	1.390
0.80	1.414

Решение:

Многочлен Лагранжа для пяти узлов интерполирования запишется так:

$$L_5(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$

Применяя формулу Лагранжа, получим (произведем расчет последовательно по слагаемым, для упрощения выражений используем функцию Mathcad для работы с символьными выражениями «Развернуть»):

$$а)\ 1 \cdot \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8)}{(0-0.2)(0-0.4)(0-0.6)(0-0.8)} =$$

$$= 26.042x^4 - 52.083x^3 + 36.458x^2 - 10.417x + 1.$$

$$б)\ 1.179 \cdot \frac{(x-0)(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8)}{(0.2-0)(0.2-0.4)(0.2-0.6)(0.2-0.8)} =$$

$$= -122.725x^4 + 221.0625x^3 - 127.725x^2 + 23.58x$$

$$в)\ 1.31 \cdot \frac{(x-0)(x-0.2)(x-0.6)(x-0.8)}{(0.4-0)(0.4-0.2)(0.4-0.6)(0.4-0.8)} =$$

$$= 206.688x^4 - 327.5x^3 + 155.562x^2 - 19.65x$$

$$г)\ 1.39 \cdot \frac{(x-0)(x-0.2)(x-0.4)(x-0.8)}{(0.6-0)(0.6-0.2)(0.6-0.4)(0.6-0.8)} =$$

$$= -144.792x^4 + 202.708x^3 - 81.083x^2 + 9.267x$$

$$д)\ 1.414 \cdot \frac{(x-0)(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6)}{(0.8-0)(0.8-0.2)(0.8-0.4)(0.8-0.6)} =$$

$$= 36.823x^4 - 44.187x^3 + 16.202x^2 - 1.7675x$$

Суммируем результаты выражений а, б, в, г, д и получаем многочлен Лагранжа четвертой степени:

$$\underline{L_5(x) = -0.0521x^4 - 0.5854x^2 + 1.0125x + 1}.$$