Лабораторная работа по численным методам с решением

Задание 1.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - (3(b+1)+a)x + (b+1)$, где $a = 4; b = 4$

$f(x) = x^3 - 19x + 5$

- Провести математическое исследование графика функции $f(x)$. Построить эскиз графика функции.
- Изолировать нули функции $f(x)$, то есть найти интервалы, на которых $f(x)$ меняет знак. На каждом интервале сделать 4 шага методом половинного деления.
- Найти приближенные значения корней методом Ньютона (касательных). В качестве начальных приближений брать середины найденных выше интервалов. Сделать по 2 шага.

Все вычисления должны проводиться с точностью не менее 5 знаков после запятой.

Решение.

<u>Математическое исследование графика функции $f(x)$.</u>

Область определения $x \in R$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической, то есть функция общего вида.

Функция непрерывна на всей области определения, вертикальных асимптот нет.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 19x + 5) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 19x + 5) = -\infty$

Горизонтальных асимптот нет.

Наклонная асимптота $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 19x + 5}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 - 19 + \frac{5}{x}\right) = +\infty$$

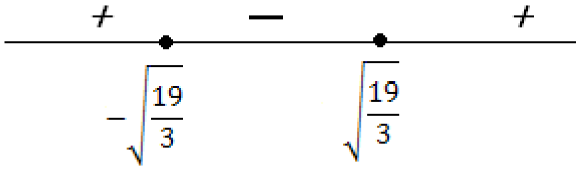
Наклонных асимптот нет.

Исследуем на экстремумы.

$y' = 3x^2 - 19$

$$y' = 0 \to \quad x = \pm\sqrt{\frac{19}{3}} \approx \pm 2.516611478$$

Исследуем знаки производной методом интервалов:



Итак, при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{19}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{19}{3}}; +\infty\right)$ функция возрастает, при $x \in \left(-\sqrt{\frac{19}{3}}; \sqrt{\frac{19}{3}}\right)$ функция убывает.

Точка максимума:

$$x = -\sqrt{\frac{19}{3}} \approx -2.516611478$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx 36.87707872$$

Точка минимума:

$$x = \sqrt{\frac{19}{3}} \approx -2.516611478$$

$$f\left(\sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx -26.87707872$$

Исследуем на перегибы.

$y'' = (3x^2 - 19)' = 6x$

$y'' = 0 \to 6x = 0 \to x = 0$

Очевидно, что при $x < 0$ $y'' < 0$, а при $x > 0$ $y'' > 0$

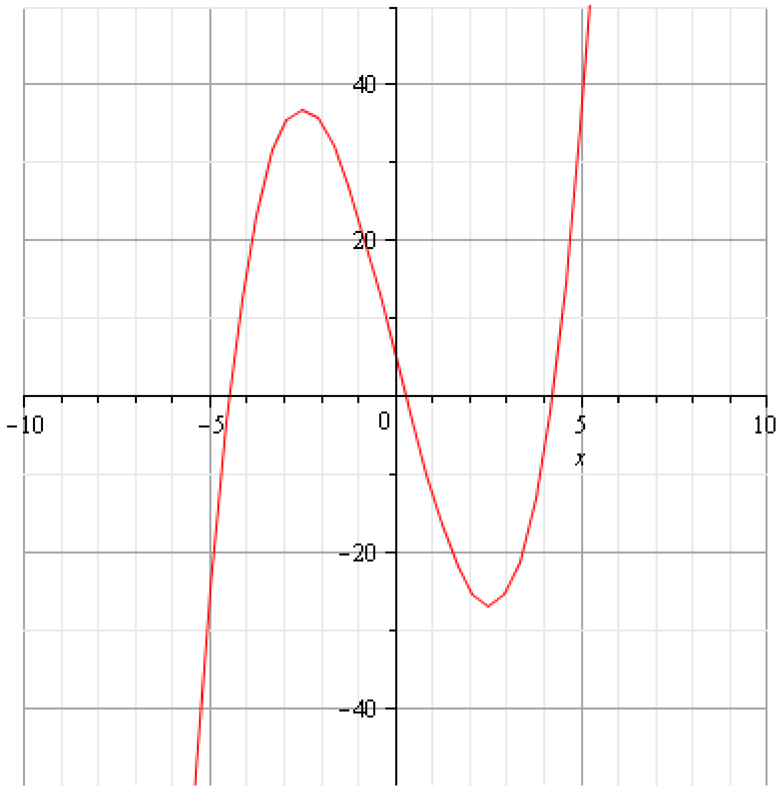
При $x \in (-\infty; 0)$ функция выпукла, при $x \in (0; +\infty)$ функция вогнута, $x = 0$ - точка перегиба

$f(0) = 5$

Протабулируем функцию на отрезке $[-10; 10]$ с шагом 1:

x	f(x)		x	f(x)
-10	-805		1	-13
-9	-553		2	-25
-8	-355		3	-25
-7	-205		4	-7
-6	-97		5	35
-5	-25		6	107
-4	17		7	215
-3	35		8	365
-2	35		9	563
-1	23		10	815
0	5			

Построим эскиз графика функции:



Уточнение интервалов, содержащих корни.

По эскизу определим три интервала, на которых x меняет знак (уравнение третьей степени может иметь не более трех корней).

$(a_1;b_1)=(-5;-4)$

$(a_2;b_2)=(0;1)$

$(a_3;b_3)=(4;5)$

Рассмотрим первый интервал. На концах интервала функция принимает значения разных знаков:

$f(-5)=-25; f(-4)=17$

Найдем середину отрезка

$$c=\frac{-5+(-4)}{2}=-4.5$$

Вычислим значение функции в середине отрезка:

$f(c)=f(-4.5)=(-4.5)^3-19\cdot(-4.5)+5=-0.625$

Теперь из двух отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$ выберем тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. В данном случае это отрезок $[c;b]=[-4.5;-4]$. Все рассмотренные операции - первый шаг метода половинного деления. Проведем второй шаг, разделив пополам отрезок $[-4.5;4]$ и выбрав ту половину, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Аналогично проведем третий и четвертый шаг. Вычисления представим в таблице:

Шаг	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
0	-5	-4	-4,5	-25	17	-0,625
1	-4,5	-4	-4,25	-0,625	17	8,984375
2	-4,5	-4,25	-4,375	-0,625	8,984375	4,384766
3	-4,5	-4,375	-4,4375	-0,625	4,384766	1,931885
4	-4,5	-4,4375				

Аналогично проведем 4 шага метода половинного деления для интервала $(0;1)$

Шаг	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
0	0	1	0,5	5	-13	-4,375
1	0	0,5	0,25	5	-4,375	0,265625
2	0,25	0,5	0,375	0,265625	-4,375	-2,07227
3	0,25	0,375	0,3125	0,265625	-2,07227	-0,90698
4	0,25	0,3125				

4 шага метода половинного деления для интервала $(4;5)$:

Шаг	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
0	4	5	4,5	-7	35	10,625
1	4	4,5	4,25	-7	10,625	1,015625
2	4	4,25	4,125	-7	1,015625	-3,18555
3	4,125	4,25	4,1875	-3,18555	1,015625	-1,13403
4	4,1875	4,25				

Обобщим полученные результаты:

Шаг	$(-5;-4)$	$(0;1)$	$(4;5)$
1	$(-4.5;-4)$	$(0;0.5)$	$(4;4.5)$
2	$(-4.5;-4.25)$	$(0.25;0.5)$	$(4;4.25)$
3	$(-4.5;-4.375)$	$(0.25;0.375)$	$(4.125;4.25)$
4	$(-4.5;-4.4375)$	$(0.25;0.3125)$	$(4.1875;4.25)$

<u>Вычисление корней методом Ньютона.</u>

Найдем приближенное значение корня, принадлежащего интервалу $(-4.5;\ -4.4375)$. В качестве начального приближения выберем середину интервала $(-4.5;\ -4.4375)$:

$$x_0 = \frac{-4.5 - 4.4375}{2} = 4.46875$$

Следующие приближения вычисляются по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = x^3 - 19x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 19$$

Приведем вычисления в таблице:

Шаг	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	-4,46875000	0,66653442	40,90917969	0,01629303
1	-4,48504303	-0,00356319	41,34683290	-0,00008618
2	-4,48495685			

Аналогично проведем два шага метода Ньютона для корня, принадлежащего интервалу $(0.25;0.3125)$:

Шаг	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	0,28125000	-0,32150269	- 18,76269531	0,01713521
1	0,26411479	0,00024271	-	-0,00001292

			18,79073013	
2	0,26412771			

Два шага метода Ньютона для корня, принадлежащего интервалу $(4.1875; 4.25)$:

Шаг	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	4,21875000	-0,07156372	34,39355469	-0,00208073
1	4,22083073	0,00005480	34,44623617	0,00000159
2	4,22082914			

Обобщим результаты вычислений в таблицу:

Шаг	$(-4.5; -4.4375)$	$(0.25; 0.3125)$	$(4.1875; 4.25)$
0	-4,46875000	0,28125000	4,21875000
1	-4,48504303	0,26411479	4,22083073
2	-4,48495685	0,26412771	4,22082914

Ответ.

Результаты отделения корней и уточнения их методом половинного деления:

Шаг	$(-5; -4)$	$(0; 1)$	$(4; 5)$
1	$(-4.5; -4)$	$(0; 0.5)$	$(4; 4.5)$
2	$(-4.5; -4.25)$	$(0.25; 0.5)$	$(4; 4.25)$
3	$(-4.5; -4.375)$	$(0.25; 0.375)$	$(4.125; 4.25)$
4	$(-4.5; -4.4375)$	$(0.25; 0.3125)$	$(4.1875; 4.25)$

Результаты уточнения корней методом Ньютона:

Шаг	$(-4.5; -4.4375)$	$(0.25; 0.3125)$	$(4.1875; 4.25)$
0	-4,46875000	0,28125000	4,21875000
1	-4,48504303	0,26411479	4,22083073
2	-4,48495685	0,26412771	4,22082914

Задание 2.

Рассмотрим матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} -a-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & c+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

где $a = 1; b = 4; c = 4$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

- Найти обратную матрицу P^{-1} и вычислить произведение матриц $W = P \cdot R \cdot P^{-1}$
- Найти $\det W$ методом Гаусса.

- Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выделением главных элементов по столбцам

  $Wx = b$

  где

  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Все вычисления проводятся точно, без округлений.

Решение.

Найдем P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

A_{ij} - алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

M_{ij} - минор, полученный вычеркиванием из определителя i -ой строки и j -ого столбца.

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+1+1) - (1-1-1) = 3 - (-1) = 4$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2; A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Вычислим произведение матриц $W = P \cdot R \cdot P^{-1}$

$$P \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1\cdot 0+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 5+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot\frac{9}{2} \\ -1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1\cdot 0+1\cdot 0 & -1\cdot 0+1\cdot 5+1\cdot 0 & -1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot\frac{9}{2} \\ 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1\cdot 0+1\cdot 0 & 1\cdot 0-1\cdot 5+1\cdot 0 & 1\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot\frac{9}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} & -5 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$W = P\cdot R\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} & -5 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\cdot 0 & -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5\cdot 0+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\cdot 0+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\cdot 0 & \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5\cdot 0+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\cdot 0+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-5\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\cdot 0 & -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-5\cdot 0+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\cdot 0-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} & 3 & \frac{19}{4} \end{pmatrix}$$

Найдем определитель полученной матрицы W методом Гаусса. С помощью эквивалентных преобразований сведем матрицу к лестничному виду.

К элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на $\left(-\frac{\frac{13}{4}}{\frac{7}{4}}\right) = \left(-\frac{13}{7}\right)$. К элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на $\left(-\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{7}{4}}\right) = \frac{13}{7}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} & 3 & \frac{19}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{57}{14} & -\frac{3}{14} \\ 0 & \frac{60}{7} & \frac{30}{7} \end{pmatrix}$$

Теперь к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на $\left(-\frac{\frac{60}{7}}{-\frac{57}{14}}\right) = \frac{120}{57}$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} & 3 & \frac{19}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{57}{14} & -\frac{3}{14} \\ 0 & \frac{60}{7} & \frac{30}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{57}{14} & -\frac{3}{14} \\ 0 & 0 & \frac{270}{57} \end{pmatrix}$$

Описанные преобразования не влияют на значение определителя матрицы. Определитель матрицы равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали полученной ступенчатой матрицы:

$$\det W = \frac{7}{4}\cdot\left(-\frac{57}{14}\right)\cdot\frac{270}{57} = -\frac{135}{4}$$

Решиv систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выделением главных элементов по столбцам

$$Wx = b$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} & 3 & \frac{19}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

7/4	3	-1/4	1
13/4	3/2	-1/4	2
-13/4	3	19/4	3

Максимальный по модулю элемент первого столбца: $a_{12} = \frac{13}{4}$ (можно было выбрать и a_{13}, по модулю он равен $a\_12)$.
Поменяем местами первую и вторую строки.

13/4	3/2	-1/4	2
7/4	3	-1/4	1
-13/4	3	19/4	3

К элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на $\left(-\frac{\frac{7}{4}}{\frac{13}{4}}\right) = \left(-\frac{7}{13}\right)$. К элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на $\left(-\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{13}{4}}\right) = 1$.

13/4	3/2	-1/4	2
0	57/26	-3/26	-2/26
0	9/2	9/2	5

Максимальный по модулю элемент второго столбца: $a_{32} = \frac{9}{2}$. Поменяем местами вторую и третью строку:

13/4	3/2	-1/4	2
0	9/2	9/2	5
0	57/26	-3/26	-2/26

К элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на $\left(-\frac{\frac{57}{26}}{\frac{9}{2}}\right) = \left(-\frac{19}{39}\right)$.

13/4	3/2	-1/4	2
0	9/2	9/2	5
0	0	-90/39	-98/39

Получили ступенчатый вид расширенной матрицы. Теперь проведем обратный ход метода Гаусса, последовательно выражая неизвестные, начиная с x_3:

$-\frac{90}{39}x_3 = -\frac{98}{39}$

$x_3 = \frac{98}{90} = \frac{49}{45}$

$\frac{9}{2}x_2 = 5 - \frac{9}{2}x_3 = 5 - \frac{9}{2}\cdot\frac{49}{45} = 5 - \frac{49}{10} = \frac{1}{10}$

$x_2 = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{45}$

$\frac{13}{4}x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{45} + \frac{1}{4}\cdot\frac{49}{45} = 2 - \frac{1}{30} + \frac{49}{180} = \frac{403}{180}$

$x_1 = \frac{4}{13}\cdot\frac{403}{180} = \frac{31}{45}$

$x_1 = \frac{31}{45}; x_2 = \frac{1}{45}; x_3 = \frac{49}{45}$

Ответ.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\ W = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 3 & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} & 3 & \frac{19}{4} \end{pmatrix}; \det W = -\frac{135}{4}; x = \begin{pmatrix} \frac{31}{45} \\ \frac{1}{45} \\ \frac{49}{45} \end{pmatrix}$$

Задание 3.

Дана таблица экспериментальных данных $y = f(x)$:

x	1	2	3	4	5
y	$y_1 = 1$	$y_2 = 2 + \frac{a}{10}$	$y_3 = 3 + \frac{b}{10}$	$y_4 = 4 + \frac{c}{10}$	$y_5 = 5 + \frac{d}{10}$

$a = 1; b = 1; c = 4; d = 4$

x	1	2	3	4	5
y	1	2.1	3.1	4.4	5.4

- Предполагая, что зависимость линейная, то есть $y = ax + b$, найти a и b методом наименьших квадратов.
- На одном и том же листе миллиметровки нанести точки таблицы и построить график полученной прямой.

Все вычисления проводятся с точностью 5 знаков после запятой.

Решение.

Коэффициенты a и b найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum x_i + bn = \sum y_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Найдем необходимые суммы:

x	y	x^2	xy
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2,00000	2,10000	4,00000	4,20000

3,00000	3,10000	9,00000	9,30000
4,00000	4,40000	16,00000	17,60000
5,00000	5,40000	25,00000	27,00000
Сумма			
15,00000	16,00000	55,00000	59,10000

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 15a + 5b = 16 \\ 55a + 15b = 59.1 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

15	5	16
55	15	59,1

1	0,333333	1,066667
55	15	59,1

1	0,333333	1,066667
0	-3,33333	0,433333

1	0,333333	1,066667
0	1	-0,130000

1	0	1,110000
0	1	-0,130000

Получили уравнение:

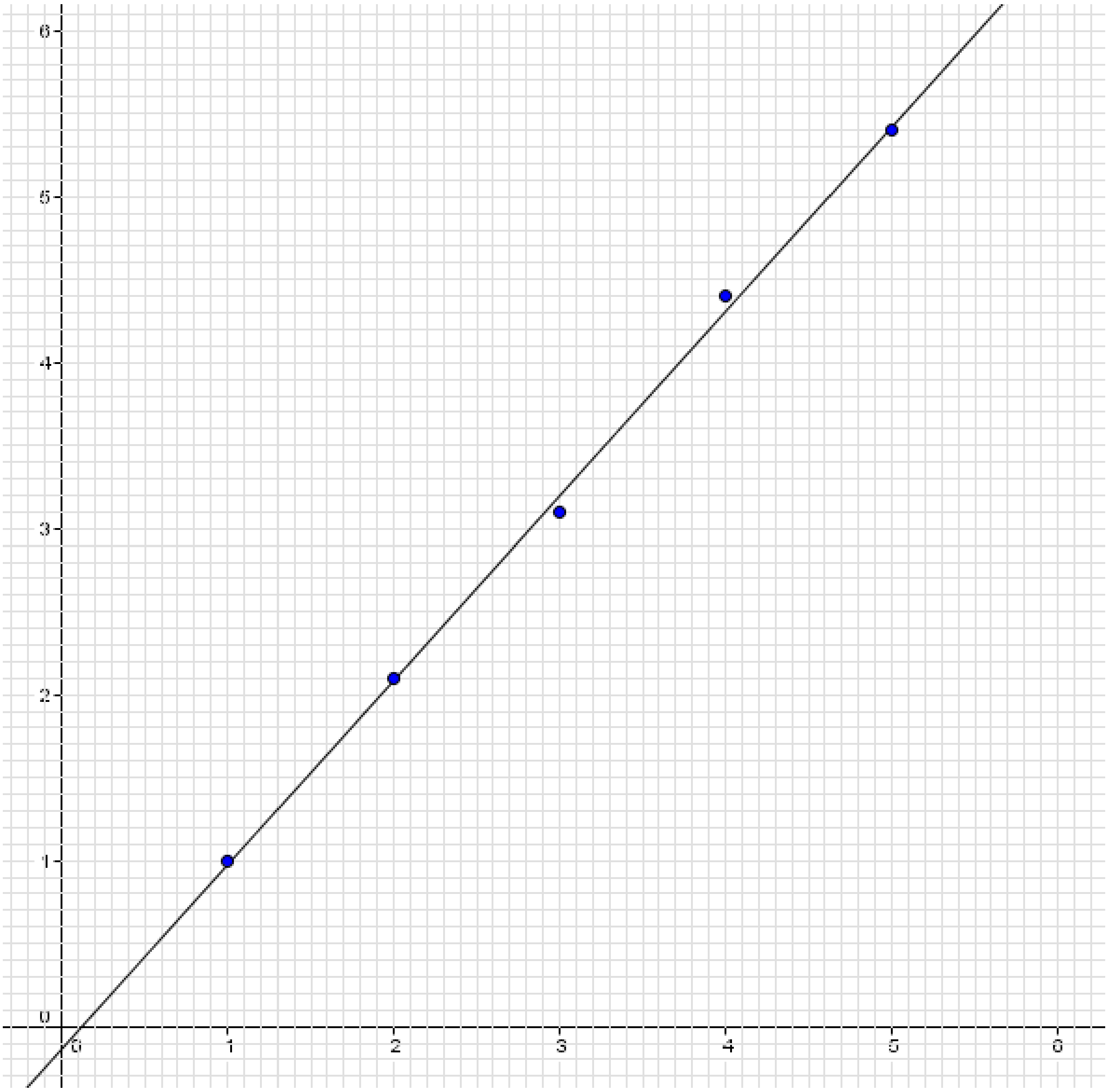
$y = 1.110000x - 0.130000$

Чтобы построить уравнение найденной прямой, достаточно двух точек.

$x = 0 \to y = -0.1300000$

$x = 1 \to \quad y = 1.110000 - 0.130000 = 0.980000$

Построим на одном графике экспериментальные точки и полученную прямую (см. след. страницу)



Ответ. $y = 1.110000x - 0.130000$