Теория систем и системный анализ
Контрольная работа

Оглавление

Задание 1. Моделирование задач исследования операций

Для приготовления комбикорма совхоз может закупить зерно трех сортов, отличающихся друг от друга содержанием питательных компонентов. Для обеспечения нормального питания скота в течение планируемого периода комбикорм должен содержать не менее B_j единиц питательного компонента j типа ($j=1,n$).
Одна тонна зерна зерна i-го сорта стоит R_i рублей и содержит a_{ij} долей питательного компонента j-го типа. Складские помещения позволяют хранить не более A тонн зерна.
Определить какое минимальное количество средств должен вложить колхоз в закупку зерна, чтобы обеспечить заданную питательность комбикорма с учетом емкости складских помещений. Сколько зерна каждого сорта необходимо закупить?

Решение.
Вводим переменные:
x_1 – количество зерна 1 сорта,
x_2 – количество зерна 2 сорта.
x_3 – количество зерна 3 сорта.

Целевая минимизируемая функция $R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3$, стоимость зерна.
Ограничения по питательности:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq B_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq B_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \geq B_n \end{cases}$$

Ограничение по вместительности:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq A$$

Получаем задачу:

$$R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq B_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq B_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \geq B_n \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq A \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

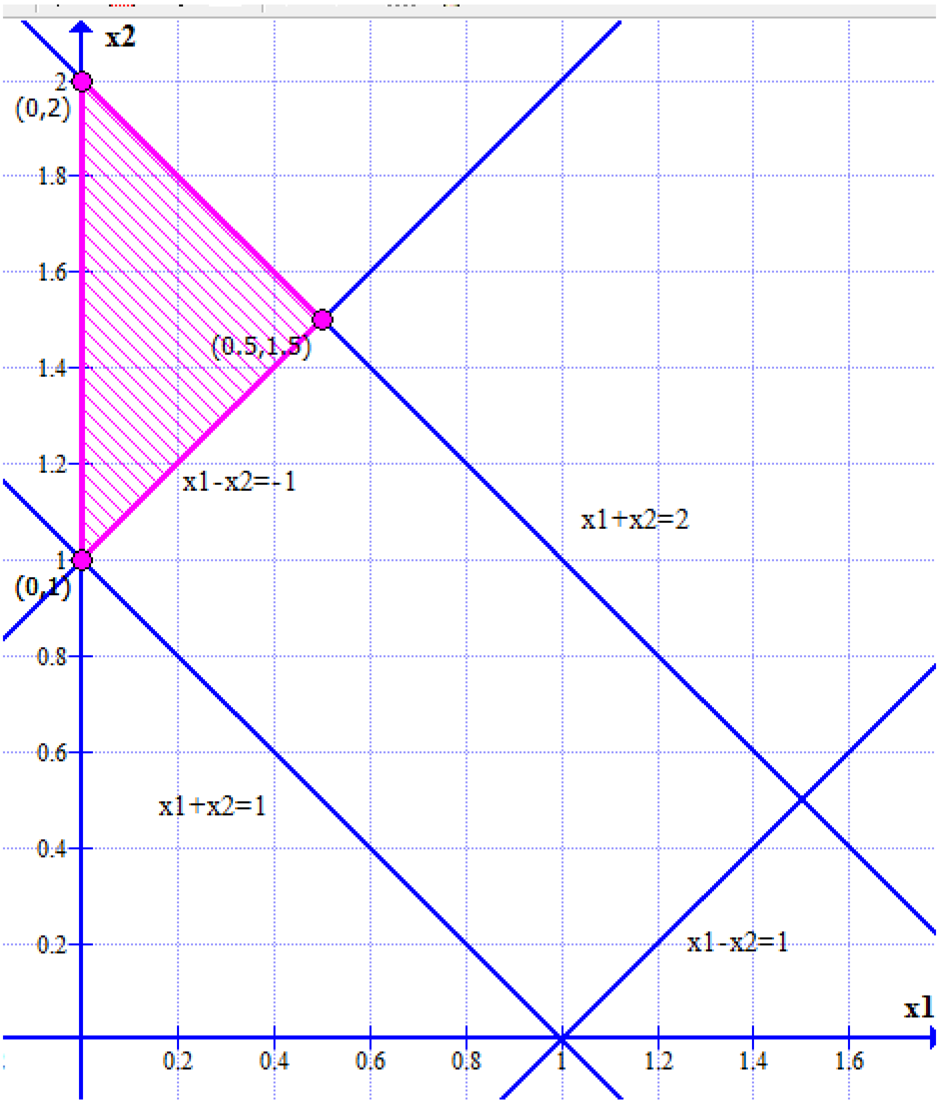
Задание 2. Решение задач линейного программирования общего вида.

В данном задании необходимо решить исходную задачу ЛП графическим способом, затем от исходной ЗЛП перейти к двойственной, решить ее симплекс-методом и по решению двойственной задачи найти решение исходной.

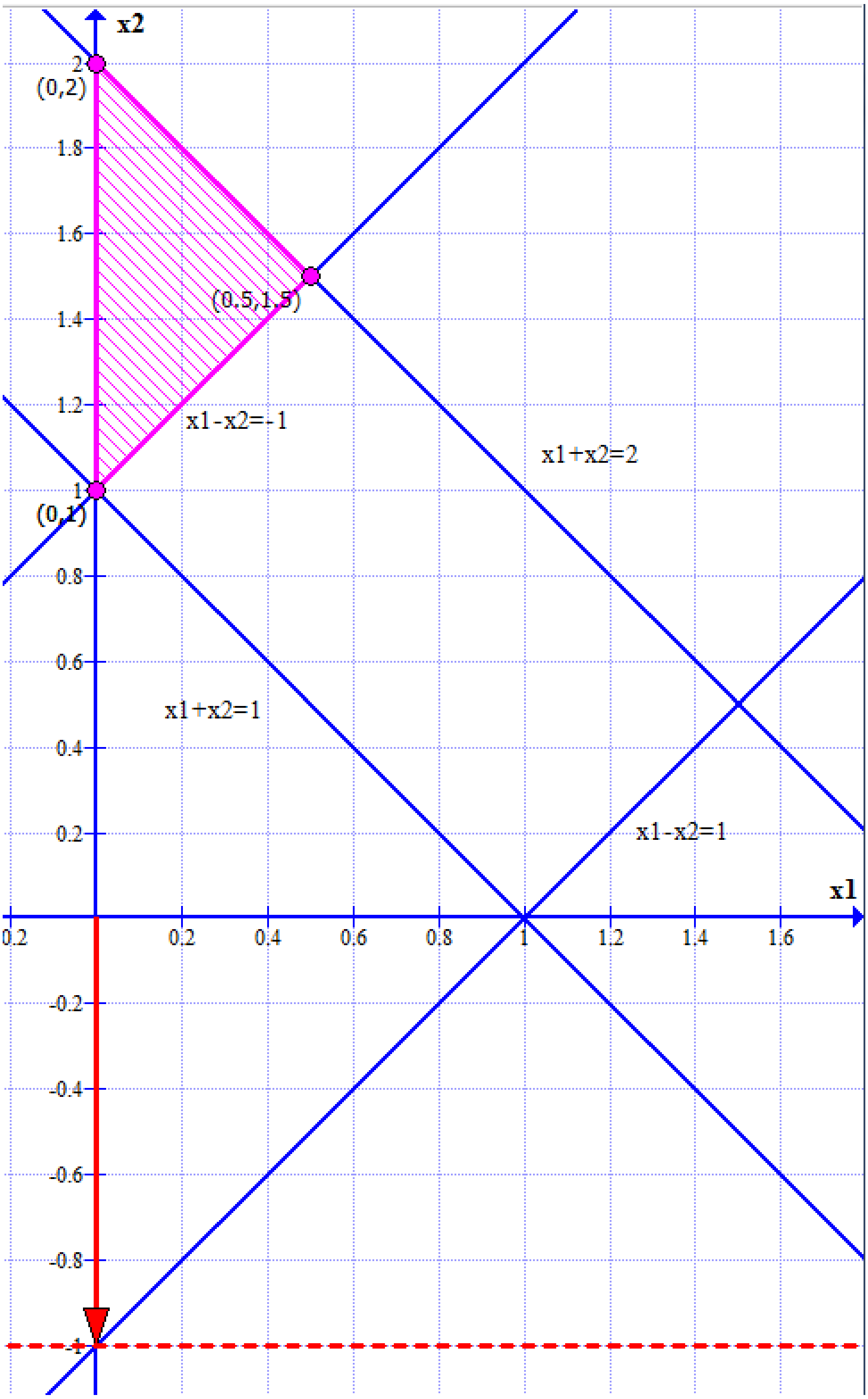
$-x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

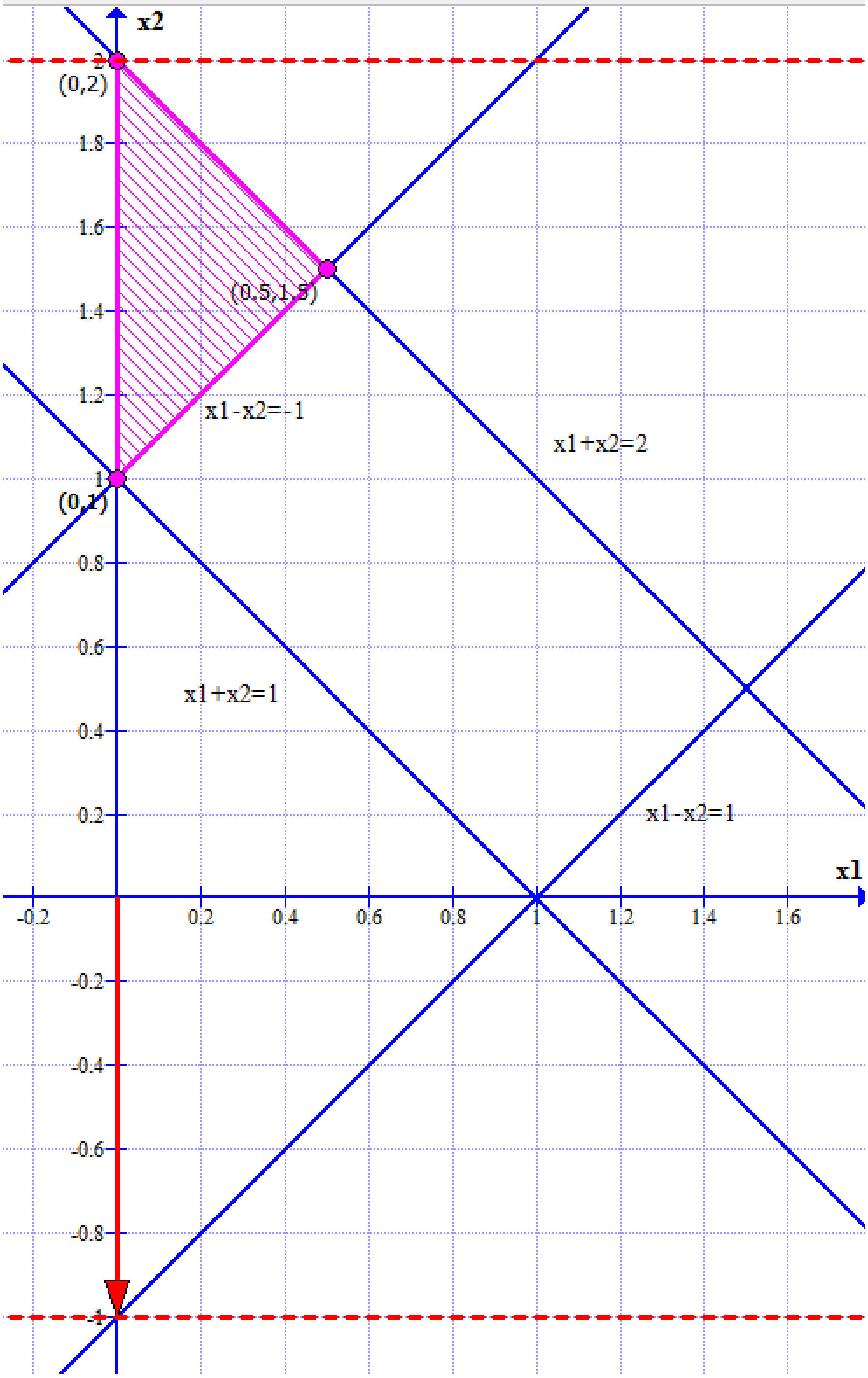
Решение.
Решаем задачу графическим способом.
Строим линии ограничений, и находим область допустимых значений.



Область допустимых значений – 3-угольник, ограниченный точками (0;1) – (0;2) – (0,5;1,5).
Далее строим направляющий вектор из начала координат в точку (0;-1)
Проводим перпендикулярно ему прямую целевой функции.



Сдвигаем прямую параллельно до крайнего касания ОДЗ.



Такое касание будет в точке (0;2).
В точке (0;2) – минимум.
Значение функции в точке $0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$.

Составляем двойственную задачу:

$$-x_2 \to \min \qquad -x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 - x_2 \ge -2 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \to \begin{matrix} y_1 - 2y_2 - y_3 + y_4 \to \max \\ \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \le 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \le -1 \end{cases} \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{matrix}$$

Решаем двойственную задачу симплекс методом.

Итерация	Базис	Значение	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
0	-Z	0	-1	2	1	-1	0	0	0
	y5	0	1	-1	-1	-1	1	0	0
	y6	-1	1	-1	1	1	0	1	1
Итерация	Базис	Значение	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
1	-Z	-2	1	0	3	1	0	2	
	y5	1	0	0	-2	-2	1	-1	
	y2	1	-1	1	-1	-1	0	-1	

Получаем решение двойственной задачи:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$Z = -2$$

Из последней симплекс таблицы находим решение исходной задачи:

Итерация	Базис	Значение	y1	y2	y3	y4	y5	y6
1	-Z	-2	1	0	3	1	0	2
	y5	1	0	0	-2	-2	1	-1
	y2	1	-1	1	-1	-1	0	-1

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$F = -2$$

Задание 3. Решение транспортной задачи линейного программирования.

В данном задании необходимо найти решение транспортной задачи по критерию стоимости методом потенциалов.

26	30	17	10	16	4
30	37	26	9	23	6
13	4	32	3	1	10
3	1	5	14	24	10
7	7	7	7	2	

Решение.
Составляем распределительную таблицу.
В заголовках строк и столбцов стоят сначала объемы спроса и предложения, затем (вторым числом) будут стоять потенциалы.
В ячейках стоят:
справа вверху – стоимость перевозки
справа внизу – объем перевозки
слева вверху – потенциал клетки
Справа от таблицы стоят остатки предложения поставщиков, снизу от таблицы – остатки спроса потребителей.
В правом нижнем углу – суммарная стоимость перевозки.

a\q	7		7		7		7		2			
4		26		30		17		10		16		
												4
6		30		37		26		9		23		
												6
10		13		4		32		3		1		
												10
10		3		1		5		14		24		
												10
	7		7		7		7		2		Ст	0

Находим начальный план методом наименьшей стоимости.
Выбираем перевозку с наименьшей стоимостью (1) и перевозим минимум из спроса по столбцу и предложения по строке min(7;10)=7.

a\q	7	7	7	7	2		
4	26	30	17	10	16		
							4
6	30	37	26	9	23		
							6
10	13	4	32	3	1		
							10
10	3	1	5	14	24		
		7					3
	7	0	7	7	2	Ст	7

Далее двигаемся аналогично, выбирая наименьшие стоимости.

a\q	7	7	7	7	2		
4	26	30	17	10	16		
			4				0
6	30	37	26	9	23		
	3		3				0
10	13	4	32	3	1		
	1			7	2		0
10	3	1	5	14	24		
	3	7					0
	0	0	0	0	0	Ст	288

Стоимость данного плана = 288.

Далее производим оценку эффективности плана по методу наименьшей стоимости расчетом потенциалов.
Потенциал 1 строки = 0.

a\q	7	7	7	7	2
4	26	30	17	10	16
0			4		
6	30	37	26	9	23
	3		3		
10	13	4	32	3	1
	1			7	2
10	3	1	5	14	24
	3	7			

Ищем в 1 строке перевозки (в 3 столбце), и рассчитываем потенциалы соответствующих столбцов (стоимость перевозки – потенциал строки):
потенциал 3 столбца = 17-0=17

a\q	7		7		7	***17***	7		2	
4		26		30		17		10		16
0						4				
6		30		37		26		9		23
		3				3				
10		13		4		32		3		1
		1						7		2
10		3		1		5		14		24
		3		7						

Аналогично определяем потенциалы прочих строк и столбцов, следуя правилу – двигаемся по ячейкам с перевозками и (потенциал строки + потенциал столбца = стоимость перевозки).

a\q	7	***21***	7	***19***	7	***17***	7	***11***	2	***9***
4		26		30		17		10		16
0						4				
6		30		37		26		9		23
9		3				3				
10		13		4		32		3		1
-8		1						7		2
10		3		1		5		14		24
-18		3		7						

Далее рассчитываем потенциалы ячеек (потенциал строки + потенциал столбца - стоимость перевозки, потенциал занятой ячейки = 0).

a\q	7	***21***	7	***19***	7	***17***	7	***11***	2	***9***
4	***-5***	26	***-11***	30	***0***	17	1	10	-7	16
0						4				
6	***0***	30	***-9***	37	***0***	26	11	9	-5	23
9		3				3				
10	***0***	13	***7***	4	***-23***	32	0	3	0	1
-8		1						7		2
10	***0***	3	***0***	1	***-6***	5	***-21***	14	***-33***	24
-18		3		7						

Как видим, у ячеек (1,4), (2,4), (3,2) потенциал больше 0, значит, там обязательно нужна перевозка.
Перераспределяем.
Ставим «+» куда перераспределяем перевозку, «-» - откуда перераспределяем.

a\q	7	21	7	19	7	17	7	11	2	9
4	-5	26	-11	30	0	17	1	10	-7	16
0						4				
6	0	30	-9	37	0	26	11	9	-5	23
9	-	3				3	+			
10	0	13	7	4	-23	32	0	3	0	1
-8		1	+				-	7		2
10	0	3	0	1	-6	5	-21	14	-33	24
-18	+	3	-	7						

Перераспределяем минимальное значение из ячеек с «+» и «-» - это 3.
Пересчитываем потенциалы.

a\q	7	3	7	1	7	17	7	0	2	-2		
4	-23	26	-29	30	0	17	-10	10	-18	16		
0						4						0
6	-18	30	-27	37	0	26	0	9	-16	23		
9						3		3				0
10	-7	13	0	4	-12	32	0	3	0	1		
3		1		3				4		2		0
10	0	3	0	1	12	5	-14	14	-26	24		
0		6		4								0
	0		0		0		0		0		Ст	234

План не оптимален, перераспределяем еще.

a\q	7	15	7	6	7	17	7	5	2	3		
4	-11	26	-24	30	0	17	-5	10	-13	16		
0						4						0
6	-11	30	-27	37	-5	26	0	9	-16	23		
4								6				0
10	0	13	0	4	-17	32	0	3	0	1		
-2		0		7				1		2		0
10	0	3	-7	1	0	5	-21	14	-33	24		
-12		7				3						0
	0		0		0		0		0		Ст	191

План оптимален, так как потенциалы всех ячеек не положительны.
Минимальная стоимость перевозки = 191.