

## Финансовые вычисления Контрольная работа с решением

**Задача 1.** Банк выдал ссуду на 35 дней в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 20% годовых. Рассчитать доход банка, если при начислении простых процентов считается, что в году: а) 360 дней; б) 365 дней.

**Решение.**

Доход банка равен:  $F - P$ , где  $P$  это величина ссуды, а  $F$  наращенная сумма.

$F = P(1+r \cdot t/T)$ , где  $F$ - наращенная сумма,  $r$ - простая ссудная ставка,  $t$ - продолжительность финансовой операции,  $T$ - кол-во дней в году.

$$P = 100\,000 \text{ руб.}$$

$$r = 20\%$$

$$t = 35 \text{ дней}$$

$$\text{а) } T = 360; \text{ б) } T = 365;$$

$$\text{а) } F = 100000 (1+0,20 \cdot 35/360) = 101944,44$$

$$\text{Доход банка равен: } 101944,44 - 100000 = 1944,44 \text{ руб.}$$

$$\text{б) } F = 100000(1+0,20 \cdot 35/365) = 101917,80 \text{ руб.}$$

$$\text{Доход банка равен: } 101917,8 - 100000 = 1917,80 \text{ руб.}$$

**Задача 2.** Векселедержатель 20 февраля предъявил для учета вексель со сроком погашения 31 марта того же года. Банк учел вексель по простой учетной ставке 15% годовых и выплатил клиенту 250 тыс. руб. Какой величины комиссионные удержаны банком в свою пользу, если год високосный?

**Решение.**

Комиссионные банка:  $F - P$ , где  $P$  это сумма полученная векселедержателем, а  $F$  наращенная сумма.

$$F = P(1+d \cdot t/T)$$

$$P = 250000 \text{ руб.}$$

$$d = 15\%$$

$$t = 40 \text{ дней}$$

$$T = 360;$$

$$F = 250000/(1-0,15 \cdot 40/360) = 254166,67 \text{ руб.}$$

$$\text{Комиссионные банка равны: } 254166,67 - 250000 = 4166,67 \text{ руб.}$$

**Задача 3.** За какой срок исходная сумма в 15 тыс. руб. возрастает до 50 тыс. руб., если сложные проценты по процентной ставке 28 % годовых начисляются: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?

$$P = 15000; F = 50000; r = 0.28$$

**Решение.**

Из формулы  $F = P (1 + r/m)^{nm}$  выводим формулу  $n = \frac{\text{Ln}\left(\frac{F}{P}\right)}{m \text{Ln}(1 + r/m)}$

а)  $m = 1$

$$n = \frac{\text{Ln} \frac{50000}{15000}}{1 \cdot \text{Ln}(1 + 0.8/1)} = 2,05 \text{ года}$$

б)  $m = 4$

$$n = \frac{\text{Ln} \frac{50000}{15000}}{4 \cdot \text{Ln}(1 + 0,8/4)} = 1,65 \text{ года}$$

в)  $m = 12$

$$n = \frac{\text{Ln} \frac{500000}{150000}}{12 \cdot \text{Ln}(1 + 0,8/12)} = 1,55 \text{ года}$$

**задача 4.** Вы имеете вексель на сумму 1500000 руб. и хотели бы при его учете по сложной учетной ставке за 2 года до срока погашения получить 2/3 этой суммы. Какая должна быть годовая учетная ставка при дисконтировании поквартально?

**Решение.**

Получаем:

$$F = 15000000 \text{ руб.}$$

$$P = 1200000 \text{ руб.}$$

$$n = 2$$

$$m = 4$$

По формуле  $d = m \left[ 1 - \left( \frac{P}{F} \right)^{\frac{1}{m \cdot n}} \right]$  вычисляем:  $d = 4 \cdot \left( 1 - 0.8^{\frac{1}{4 \cdot 2}} \right) = 0,11$

Годовая учетная ставка равна 11%

**Задача 5.** Рассчитайте эффективную годовую процентную ставку, если номинальная ставка равна 10% годовых и проценты начисляются: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

**Решение.**

$r_e$  - эффективная ставка

$$r = 10\%$$

а)  $m = 1$ ; б)  $m = 4$ ; в)  $m = 12$ ;

$$r_e = (1+r/m)^m - 1$$

а)  $r_e = (1+0,1/1)^1 - 1 = 0,1 = 10\%$  при ежегодном начислении процентов;

б)  $r_e = (1+0,1/4)^4 - 1 = 0,1038 = 10,38\%$  при ежеквартальном начислении процентов;

в)  $r_e = (1+0,1/12)^{12} - 1 = 0,1047 = 10,47\%$  при ежемесячном начислении процентов;

**Задача 6.** Принято решение объединить три платежа стоимостью 10 000 долл., 20 000 долл. и 15 000 долл., срок уплаты которых наступит соответственно через 135, 166 и 227 дней от настоящего момента времени, в один платеж стоимостью 50 000 руб. Определить срок консолидированного платежа при использовании простой процентной ставки 6% годовых.

**Решение.**

Определим текущую стоимость каждого платежа по формуле:

$$P = \frac{F}{1 + rn}, \quad r = 6\%$$

а)  $F_1 = 10000$  долл.;  $n = 135/365 = 0,37$  года

$$P_1 = \frac{10000}{1 + 0,06 * 0,37} = 9782,9 \text{ долл.}$$

б)  $F_2 = 20000$  долл.;  $n = 166/365 = 0,455$  года

$$P_2 = \frac{20000}{1 + 0,06 * 0,455} = 19468,74 \text{ долл.}$$

в)  $F_3 = 15000$  долл.;  $n = 227/365 = 0,622$  года

$$P_3 = \frac{15000}{1 + 0,06 * 0,622} = 14460,41 \text{ долл.}$$

Текущая стоимость консолидированного платежа:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 9782,9 + 19468,74 + 14460,41 = 43712,05 \text{ долл.}$$

Срок консолидированного платежа:

$$n = \frac{F - P}{Pr} = \frac{50000 - 43712,05}{43712,05 * 0,06} = 2,4 \text{ года}$$

Срок консолидированного платежа равен 2,4 года.

**Задача 7.** На вклад в течение 18 месяцев начисляются проценты: а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть годовая процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 2 %?

**Решение.**

а) Так как темп инфляции за каждый квартал равен 2%, то индекс инфляции за каждый квартал (0,25 года) равен 1,12. Поэтому индекс инфляции за 18 месяцев (1,5 года, или 6 кварталов) составит:

$$I_p^{1,5} = 1,12^6 = 1,9738$$

Обозначим через  $r$  искомую годовую процентную ставку и приравняем этот индекс инфляции к множителю наращения при использовании схемы сложных процентов:

$$(1+r)^{1,5} = 1,9738.$$

Отсюда:

$$r = 1,9738^{1/1,5} - 1 = 0,5735$$

Таким образом, в этом случае ставка должна превышать 57,35% годовых.

При рассмотрении этого случая можно было рассуждать и таким образом. При инфляции 12% за каждый квартал годовой темп инфляции составит  $1,12^4 - 1 = 0,5735 = 57,35\%$ . Реальное же наращение капитала будет происходить, если годовая процентная ставка превышает годовой темп инфляции, т.е.  $r > 57,35\%$ .

б) Пусть теперь применяется смешанная схема. Приравнивая индекс инфляции за 1,5 года к множителю наращения, получим квадратное уравнение относительно  $r$ :

$$(1+r) \cdot (1+0,25r) = 1,9738$$

Решая уравнение, определяем корни:  $r = -5,6851$ ,  $r = 0,6851$

Очевидно, что по смыслу первый корень не подходит. Следовательно, при использовании смешанной схемы ставка должна превышать 68,51% годовых..

Обратим внимание, что для ответа на вопрос в данном случае необходимо фактически решить неравенство:

$$(1+r)(1+0,25r) > 1,9738$$

**Задача 8.** Вкладчик имеет 180 тыс. рублей и планирует увеличить эту сумму до 200 тыс. руб. через полгода. Определить требуемую простую годовую ставку, на основании

которой вкладчик должен выбрать банк, если ставка налога на начисленные проценты равна 2%.

**Решение.**

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F = P[(1+r(1-t))^n], \text{ где}$$

t – ставка налога на проценты.

Отсюда простая годовая процентная ставка:

$$r = \frac{F - P}{P(1-t)n} = \frac{200 - 180}{180 * (1 - 0,02) * 0,5} = 0,227$$

Простая годовая процентная ставка равна 22,7%.

**Задача 9.** Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 100 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 7%. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?

**Решение.**

а) Наращенная сумма  $P$ -срочной ренты пренумерандо с годовыми платежами  $R$  и начислением сложных процентов  $p$  раз в году ( $m = p$ ) определяется по формуле:

$$F = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{r}{m}} \left(1 + \frac{r}{m}\right) = 100 * 4 * \frac{\left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{0,08} \left(1 + \frac{0,08}{4}\right) = 2478,33 \text{ тыс. руб.}$$

б) При  $p = m = 1$ :

$$F = R * \frac{(1+r)^n - 1}{r} * (1+r) = 420 * \frac{(1+0,07)^5 - 1}{0,07} * (1+0,07) = 2584,38 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, для вкладчика более выгоден второй вариант.

**Задача 10.** Какую сумму необходимо поместить в банк под процентную ставку 10% годовых, чтобы в течение 5 лет иметь возможность ежегодно получать по 120 тыс. руб., снимая деньги равными долями каждые 2 месяца (по 20 тыс. рублей), и в конце пятого года исчерпать счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?

**Решение.**

а) Современная величина Р-срочной ренты с годовыми платежами R и с дисконтированием платежей сложными процентами один раз в году ( $m = 1$ ) по процентной ставке r определяется по формуле:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{(1 + r)^{1/p} - 1} = 20 * \frac{1 - (1 + 0,1)^{-5}}{(1 + 0,1)^{1/6} - 1} = 473,5 \text{ тыс. руб.}$$

б) При  $m > 1$ ,  $p > 1$ ,  $m \neq p$  формула примет вид:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$m = 4$

$$A = 20 * \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-4 \cdot 5}}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{6}} - 1} = 469,61 \text{ тыс. руб.}$$

в)  $m = 12$

$$A = 20 * \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-12 \cdot 5}}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{12}{6}} - 1} = 305,27 \text{ тыс. руб.}$$