МГАПИ

Задание на домашнюю контрольную работу №2 по высшей математике

Типовой расчет «Неопределенный интеграл», «Элементы высшей алгебры»

Вариант 24

Найти неопределённые интегралы.

1. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$

Решение. Используем метод подстановки (замены переменной).

$$\int \frac{e^{arctgx} \cdot dx}{1+x^2} = \left| \frac{\text{Замена } t = arctgx}{dt = \dfrac{dx}{1+x^2}} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{arctgx} + C$$

Ответ: $e^{arctgx} + C$

2. $\int \frac{5x-3}{x^2+4x-12}dx$

Решение;

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители.

$$x^2+4x-12=0; \quad D=16-4\cdot(-12)=64; \quad \sqrt{D}=8; \quad x_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{2}; \quad x_1=-6; \quad x_2=2.$$

$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2).$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{5x-3}{(x+6)(x-2)}=\frac{a}{x+6}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x+6)}{(x+6)(x-2)}$$

Так как дроби равны между собой и знаменатели у них равны, то приравняем числители.

$$5x-3=a(x-2)+b(x+6)$$

При x=2: $7=8b;\quad b=\dfrac{7}{8}.$

При x=-6: $-33=-8a;\quad a=\dfrac{33}{8}.$

Тогда интеграл примет вид

$$\int\frac{5x-3}{(x+6)(x-2)}dx=\int\left(\frac{33}{(x+6)8}+\frac{7}{(x-2)8}\right)dx=\frac{33}{8}\ln|x+6|+\frac{7}{8}\ln|x-2|+C$$

Ответ : $\dfrac{33}{8}\ln|x+6|+\dfrac{7}{8}\ln|x-2|+C$

3. $\displaystyle\int\frac{5x-1}{\sqrt{9-8x-x^2}}dx$

Решение:

Выделим полный квадрат знаменателя

$$-x^2-8x+9=-\left(x^2+2\cdot 4x+16-16-9\right)=-(x+4)^2+25$$

Запишем интеграл в виде:

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{-(x+4)^2+25}}dx = \left| \begin{matrix} \text{Замена} \quad x+4=t \\ dx=dt \\ 5x-1=5t-21 \end{matrix} \right| = \int \frac{5t-21}{\sqrt{25-t^2}}dt = \int \frac{5t}{\sqrt{25-t^2}}dt - \int \frac{21}{\sqrt{25-t^2}}dt. = -\frac{5}{2}\int \frac{d(25-t^2)}{\sqrt{25-t^2}} -$$

$$-21\arcsin\frac{t}{5}+C = -\frac{5}{2}2\sqrt{25-t^2}-21\arcsin\frac{t}{5}+C$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, получим:

$$-\frac{5}{2}2\sqrt{25-(x+4)^2}-21\arcsin\frac{x+4}{5}+C=$$

Ответ: $-5\sqrt{25-(x+4)^2}-21\arcsin\dfrac{x+4}{5}+C=$

4 $\int (x^2-3x-1)\sin 5x dx$

Решение. Применим метод интегрирования по частям.

$$\int (x^2-3x-1)\sin 5x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2-3x-1, \ dv = \sin 5x dx, \\ du = (2x-3)dx, \ v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{bmatrix} =$$

$$= u\cdot v - \int v\cdot du = -\frac{1}{5}(x^2-3x-1)\cdot\cos 5x + \frac{1}{5}\int (2x-3)\cos 5x dx$$

отдельно вычислим оставшийся интеграл тем же методом интегрирования по частям

$$\int (2x-3)\cos 5x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x-3, \ dv = \cos 5x dx, \\ du = 2dx, \ v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(2x-3)\cdot\sin 5x - \frac{2}{5}\int \sin 5x dx$$

$$= \frac{1}{5}(2x-3)\cdot\sin 5x + \frac{2}{25}\cos 5x + C$$

Окончательно получим

$$\int\left(x^2-3x-1\right)\sin 5xdx=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{3}{5}x\cos 5x+\frac{27}{125}\cos 5x+\frac{1}{25}x\sin 5x-\frac{3}{25}\sin 5x+C$$

Ответ: $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{3}{5}x\cos 5x+\frac{27}{125}\cos 5x+\frac{1}{25}x\sin 5x-\frac{3}{25}\sin 5x+C$

5. $\int e^{-3x}\sin 2xdx$

Решение

Применим метод интегрирования по частям.

$$\int e^{-3x}\sin 2x\,dx=\begin{bmatrix} u=\sin 2x, & dv=e^{-3x}dx, \\ du=2\cos 2xdx, & v=-\frac{1}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}=u\cdot v-\int v\cdot du=-\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot\sin 2x+$$

$$+\frac{2}{3}\int e^{-3x}\cos 2xdx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 2x+\begin{bmatrix} u=\cos 2x, & dv=e^{-3x}dx \\ du=-2\sin 2xdx, & v=-\frac{1}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}=$$

$$-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 2x+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 2xe^{-3x}-\frac{2}{3}\int e^{-3x}\sin 2xdx\right);$$

После двух применений формулы интегрирования по частям заметим, что в левой и правой частях этого равенства стоит искомый интеграл

$$\int e^{-3x}\sin 2xdx$$

Обозначим его

$$I=\int e^{-3x}\sin 2xdx$$

Запишем равенство в виде:

$I=-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 2x-\frac{2}{9}e^{-3x}\cos 2x-\frac{4}{9}I$ Отсюда

$I=\frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 2x-\frac{2}{9}e^{-3x}\cos 2x\right)$ Окончательно получим

$$\int e^{-3x}\sin 2xdx=-\frac{e^{-3x}}{13}(3\sin 2x+2\cos 2x)$$

Ответ: $-\frac{e^{-3x}}{13}(3\sin 2x+2\cos 2x)$

6. $\int\frac{x^2+2x+5}{(x^2+2x+2)(x+2)}dx$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{x^2+2x+5}{(x^2+2x+2)(x+2)}=\frac{ax+b}{x^2+2x+2}+\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)++c(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)(x+2)}$$

Так как дроби равны между собой и знаменатели у них равны, то приравняем числители.

$$x^2+2x+5=(ax+b)(x+2)++c(x^2+2x+2)$$

При x=-2: 5=2c $c=\frac{5}{2}$

Приравняем коэффициенты при степенях x:

$$x^2:\quad 1=a+c\quad\Rightarrow a=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}.$$

$$x^0:\quad 5=2b+2c\quad\Rightarrow b=5-2\frac{5}{2}=0$$

Тогда интеграл примет вид

$$\int\frac{x^2+2x+5}{(x^2+2x+2)(x+2)}dx=\int\frac{-3xdx}{2(x^2+2x+2)}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x+2)}$$

Вычислим отдельно каждый интеграл. Первый интеграл:

$$\int \frac{-3xdx}{2(x^2+2x+2)} = -\frac{3}{2}\int \frac{xdx}{(x+1)^2+1} = \left| \begin{matrix} x+1=t; \quad dx=dt \\ x=t-1 \end{matrix} \right| = -\frac{3}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt = -\frac{3}{4}\ln(t^2+1)+\frac{3}{2}arctgt+C$$

Перейдём к первоначальной переменной

$$-\frac{3}{4}\ln(t^2+1)+\frac{3}{2}arctgt+C = -\frac{3}{4}\ln((x+1)^2+1)+\frac{3}{2}arctg(x+1)+C$$

Второй интеграл

$$\frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+2)} = \frac{5}{2}\ln|x+2|+C$$

Окончательно

$$\int \frac{x^2+2x+5}{(x^2+2x+2)(x+2)}dx = -\frac{3}{4}\ln(x^2+2x+2)+\frac{3}{2}arctg(x+1)+\frac{5}{2}\ln|x+2|+C$$

Ответ: $-\frac{3}{4}\ln(x^2+2x+2)+\frac{3}{2}arctg(x+1)+\frac{5}{2}\ln|x+2|+C$

7. $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}+4e^x+5}dx$

Решение

Запишем интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\int \frac{e^x+3}{e^{2x}+4e^x+5}dx = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+5} + \int \frac{3dx}{e^{2x}+4e^x+5}$$

Найдём отдельно каждый из интегралов.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+5} = \left| \begin{matrix} t=e^x dx \\ dt=e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+4t+5} = \int \frac{dt}{(t+2)^2+1} = arctg(t+2)+C = arctg(e^x+2)+C$$

Во втором интеграле нодынтегральную функцию умножим и разделим на e^x

$$\int \frac{3dx}{e^{2x}+4e^x+5} = \int \frac{3e^x dx}{(e^{2x}+4e^x+5)e^x} = \left| \begin{matrix} t=e^x \\ dt=e^x \end{matrix} \right| = \int \frac{3dt}{t(t^2+4t+5)}$$

Получили интеграл от рациональной дроби $\int \frac{3dt}{t(t^2+4t+5)}$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{3}{(t^2+4t+5)t} = \frac{at+b}{t^2+4t+5} + \frac{c}{t} = \frac{(at+b)t + +c(t^2+4t+5)}{(t^2+4t+5)t}$$

Так как дроби равны между собой и знаменатели у них равны, то приравняем числители.

$$3 = (at+b)t + c(t^2+4t+5)$$

При t=0: 3=5c $c = \frac{3}{5}$

Приравняем коэффициенты при степенях t:

$$t^2: \quad 0 = a + c \quad \Rightarrow a = -\frac{3}{5}.$$

$$x^1: \quad 0 = b + 4c \quad \Rightarrow b = -4\frac{3}{5} = -\frac{12}{5}$$

Тогда интеграл примет вид

$$\int \frac{3}{(t^2+4t+5)t}dx = \int \frac{-(3t+12)dx}{5(t^2+4t+5)} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{t} = -\frac{3}{5}\int \frac{tdx}{(t^2+4t+5)} - \frac{12}{5}\int \frac{dx}{(t^2+4t+5)} + \frac{3}{5}\ln|t| =$$

Второй из этих интегралов мы уже брали, он будет равен

$$-\frac{12}{5}\int \frac{dx}{(t^2+4t+5)} = -\frac{12}{5} arctg(e^x+2).$$

Третий табличный

$$\frac{3}{5}\ln e^x + C = \frac{3}{5}x + C$$

Найдём первый

$$-\frac{3}{5}\int\frac{tdx}{(t^2+4t+5)}=-\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{(t+2)^2+1}=\left|\begin{matrix}u=t+2\\ du=dt\end{matrix}\right|=-\frac{3}{5}\int\frac{u-2}{u^2+1}du=-\frac{3}{5}\int\frac{udu}{u^2+1}+\frac{6}{5}\int\frac{du}{u^2+1}=$$

$$=-\frac{3}{10}\ln(u^2+1)+\frac{6}{5}arctgu+C=-\frac{3}{10}\ln((t+2)^2+1)+\frac{6}{5}arctg(t+2)+C=$$

$$=-\frac{3}{10}\ln(e^{2x}+4e^x+5)+\frac{6}{5}arctg(e^x+2)+C$$

Окончательно получим

$$\int\frac{e^x+3}{e^{2x}+4e^x+5}dx=-\frac{1}{5}arctg(e^x+2)-\frac{3}{10}\ln(e^{2x}+4e^x+5)+\frac{3}{5}x+C$$

Ответ: $-\frac{1}{5}arctg(e^x+2)-\frac{3}{10}\ln(e^{2x}+4e^x+5)+\frac{3}{5}x+C$

8. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}dx$

Решение

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}dx=\left|\begin{matrix}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t^2\cdot 4t^3dt}{t-1}=4\int\frac{t^5dt}{t-1}.$$

Интеграл от неправильной рациональной дроби. Выделим целую часть

$\frac{t^5}{t-1}=t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}$. Проинтегрируем

$$\int\frac{t^5dt}{t-1}=\int\left(t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t+1|+C$$

Произведём обратную замену. $t=\sqrt[4]{x}$

$$4\cdot\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t+1|\right)+C=\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}+x+\frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3}+2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$$

Ответ: $\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}+x+\frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3}+2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$

9. $\int\frac{\cos x}{3\sin x+2\cos x}dx$

Решение

Разделим числитель и знаменатель на $\cos x$

$$\int\frac{1}{3\mathrm{tg}x+2}dx=\begin{bmatrix} t=tgx, \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{dt}{(1+t^2)}}{3t+2}=\int\frac{dt}{(1+t^2)(3t+2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{1}{(t^2+1)(3t+2)}=\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{3t+2}=\frac{(at+b)(3t+2)+c(t^2+1)}{(t^2+1)(3t+2)}$$

Так как дроби равны между собой и знаменатели у них равны, то приравняем числители.
$1=(at+b)(3t+2)+c(t^2+1)$

Приравняем коэффициенты при степенях t:

$t^2:\quad 0=3a+c\quad\Rightarrow a=-\frac{c}{3}.$

$t^1:\quad 0=2a+3b\quad .$

$t^0:\quad 1=2b+c\quad\Rightarrow b=\frac{1-c}{2}$

Подставим значения a и b во второе уравнение

$$-\frac{2c}{3}+3\frac{(1-c)}{2}=0; \quad 13c=9; \quad c=\frac{9}{13}; \quad a=-\frac{3}{13}; \quad b=\frac{2}{13}.$$

Тогда интеграл примет вид

$$\int\frac{1}{(t^2+1)(3t+2)}dt=\int\frac{(-3t+2)dt}{13(t^2+1)}+\frac{9}{13}\int\frac{dt}{(3t+2)}=-\frac{3}{13}\int\frac{tdt}{t^2+1}+\frac{2}{13}\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{3}{13}\ln|3t+2|+C=$$

$$=-\frac{3}{26}\ln(t^2+1)+\frac{2}{13}arctgt+\frac{3}{13}\ln|3t+2|+C=$$

$$=-\frac{3}{26}\ln(tg^2x+1)+\frac{2}{13}arctg(tgx)+\frac{3}{13}\ln|3tgx+2|+C=$$

Так как

$tg^2x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad 3tgx+2=\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\cos x}$, то окончательный результат примет вид:

$$\int\frac{\cos x}{3\sin x+2\cos x}dx=\frac{1}{13}(2x+3\ln|3\sin x+2\cos x|)+C$$

Ответ: $\dfrac{1}{13}(2x+3\ln|3\sin x+2\cos x|)+C$

10. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x=3\sin t$. Тогда $dx=3\cos tdt$

$D_t: \quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}; \quad D_x: \quad -3\le x\le 3; \quad D_t\leftrightarrow D_x$ и

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\int 9\sin^2 t\cdot\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos tdt=81\int\sin^2 t|\cos t|\cos tdt=81\int\sin^2 t\cdot\cos^2 tdt=$$

$$81\int\frac{1}{4}\sin^2 2tdt=\frac{81}{8}\int(1-\cos 4t)dt=$$

$$\frac{81}{8}\int dt-\frac{81}{8}\int\cos 4tdt=\frac{81}{8}t+\frac{81}{32}\sin 4t+C=\frac{81}{8}t-\frac{81}{32}4\sin t\cos t\left(1-2\sin^2 t\right)+C$$

Перейдём к первоначальной переменной x, использовав равенство

$$t=\arcsin\frac{x}{3}\quad u\quad cost=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$$

В результате имеем

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{81}{32}\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\frac{\left(9-2x^2\right)}{9}+C=\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{8}\sqrt{9-x^2}\left(9-2x^2\right)+C$$

Ответ $\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{8}\sqrt{9-x^2}\left(9-2x^2\right)+C$

11. Вычислить z_1+z_2, $z_1\times z_2$ z_1/z_2, если $z_1=2-3i,\quad z_2=1+2i$.

Решение.

$$z_1+z_2=(2+1)+i(-3+2)=3-i$$

$z_1\times z_2=(2-3i)(1+2i)=2-3i+4i-6i^2=(2+6)+i(-3+4)=8+i$.Учитывали, что $i^2=-1$.

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+2i}=\frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(2-6)-i(4+3)}{1^2+2^2}=-\frac{4}{5}-i\frac{7}{5}$.Числитель и знаменатель умножили на число, сопряжённое знаменателю.

Ответ:

$z_1+z_2=3-i$, $z_1\times z_2=8+i$, $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{4}{5}-i\frac{7}{5}$

12. Вычислить $\sqrt[3]{-125}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{84}$

Решение.

Извлечём корень по формуле

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

Запишем число -125 в тригонометрической форме

$-125=125(cos\pi+i\sin\pi)$, отсюда $r=125, \quad \varphi=\pi$

$$k=0 \quad z_1=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=5\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$k=1 \quad z_1=5\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)=-5$$

$$k=2 \quad z_1=5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=5\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ответ: $5\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, -5, $5\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

13. Записать в тригонометрической и показательной форме. $z=5+2i$

Найдём модуль числа

$$r=|z|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$

Найдём аргумент числа $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}; \quad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$. Главное значение аргумента лежит в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, так как число расположено в первой четверти комплексной плоскости.

$\varphi \approx 0{,}381$ рад или $\varphi \approx 21^\circ 48'$

Ответ

Тригонометрическая форма $z = \sqrt{29}\left(\cos(0{,}381) + i\sin(0{,}381)\right)$

Показательная форма $z = \sqrt{29}e^{0{,}381i}$