Расчетно-графическая работа по математике с решением

Ряды

p = 4, q = 7

I Исследовать сходимость числовых рядов.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+1)n-q}{(q+2)n+p}$

Решение. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-7}{9n+4}$

Используем необходимый признак сходимости. Вычисляем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{9n+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5-7/n}{9+4/n}=\frac{5-0}{9+0}=\frac{5}{9}\neq 0.$$

Признак не выполняется, значит, ряд расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+1)n-q}{n^{p+2}+qn^{p}+10}$

Решение. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-7}{n^{6}+7n^{4}+10}$

Сравним данный ряд по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5}}$ (обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ с показателем $p=5>1$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n^6+7n^4+10}:\frac{1}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n-7)n^5}{n^6+7n^4+10}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(5-7/n)}{1+7/n^2+10/n^6}=\frac{5}{1}=5\neq 0,\infty$$

Значит, исходный ряд также сходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q+2)^n\cdot\sqrt[q+2]{n}}{n!}$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n\cdot\sqrt[9]{n}}{n!}$$

Используем признак Даламбера:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9^{n+1}\cdot\sqrt[9]{n+1}}{(n+1)!}:\frac{9^n\cdot\sqrt[9]{n}}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}\cdot\sqrt[9]{n+1}\cdot n!}{(n+1)!9^n\cdot\sqrt[9]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot\sqrt[9]{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt[9]{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{(n+1)}\sqrt[9]{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{(n+1)}\sqrt[9]{1+\frac{1}{n}}=\left(\frac{9}{\infty}\right)=0<1.$$

Так как $D=0<1$, ряд сходится.

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+q)(\ln(n+q))^{p-2q}}$

Решение.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(\ln(n+7))^{-10}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln(n+7))^{10}}{(n+7)}$$

Используем интегральный признак Коши. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_{2}^{\infty}\frac{(\ln(x+7))^{10}}{(x+7)}dx$.

Исследуем его сходимость.

$$\int_{2}^{\infty}\frac{(\ln(x+7))^{10}}{(x+7)}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{2}^{A}\frac{(\ln(x+7))^{10}}{(x+7)}dx=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_{2}^{A}(\ln(x+7))^{10}d(\ln(x+7))=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{11}(\ln(x+7))^{11}\right)\Bigg|_{2}^{A}=$$

$$=\frac{1}{11}\lim_{A\to\infty}\left((\ln(A+7))^{11}-(\ln(2+7))^{11}\right)=\infty.$$

Интеграл расходится, значит, исходный ряд также <u>расходится</u>.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[p+2]{n^{q+5}}}$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n^{12}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Это знакочередующийся ряд. Исследуем на сходимость ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Это обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$, поэтому он сходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+p}{5n+q}\right)^n$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+4}{5n+7}\right)^n$$

Используем радикальный признак Коши для исследования ряда из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{5n+7}\right)^n$:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+4}{5n+7}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{5n+7}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n}{5+7/n}=\frac{1}{5}<1,$$

Поэтому ряд сходится.

Значит, исходный ряд сходится абсолютно.

II Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{q-5}{2}\right)^{2n}}{(p+2)^n}$ и исследовать его на границах интервала сходимости.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{6^n}$$

Это степенной ряд. Найдем его радиус сходимости:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{n+1}}{6^n}=6$, поэтому ряд сходится абсолютно при

$$\begin{gathered}|x-1|^2<6,\\ |x-1|<\sqrt{6},\\ -\sqrt{6}+1<x<\sqrt{6}+1,\\ x\in(-\sqrt{6}+1;\sqrt{6}+1).\end{gathered}$$

Исследуем сходимость на концах промежутка.

Пусть $x=\pm\sqrt{6}+1$, получаем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\pm\sqrt{6}+1-1\right)^{2n}}{6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\pm\sqrt{6}\right)^{2n}}{6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$. Этот ряд расходится, так как его общий член 1 не стремится к нулю.

Таким образом, область сходимости ряда $x\in(-\sqrt{6}+1;\sqrt{6}+1)$.

III Разложить в степенной ряд по степеням x (ряд Маклорена) функцию

$f(x)=x\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{2p+3q}\right)$ и найти интервал сходимости полученного ряда.

Решение.

$$f(x)=x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{29}\right).$$

Используем известное разложение:

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, которое справедливо при $|x|<1$.

Получаем:

$$f(x)=x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{29}\right)=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x/29)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n\cdot 29^n}.$$

Это разложение справедливо при $|x/29|<1,\Rightarrow |x|<29,\Rightarrow x\in(-29;29)$.

Проверим сходимость на концах интервала.

Положим $x=-29$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-29)^{n+1}}{n\cdot 29^n}=29\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, он расходится. Пусть $x=29$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(29)^{n+1}}{n\cdot 29^n}=29\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Этот знакопеременный ряд сходится по признаку Лейбница, так как его общий член $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$ и монотонно убывает. Область сходимости $x\in(-29;29]$, в точке $x=29$ сходимость условная.