Расчетно-графическая работа по математике с решением

Функции многих переменных

m = 4, n = 7

Задание 1. Опишите и покажите штриховкой на координатной плоскости XOY область определения функции

$$Z(x,y)=\frac{\sqrt{(m-1,5)x^2+y-n}+\ln\left((1,5-m)y^2+x+m\right)}{4x^2+9y^2-36(m+n)}$$

Решение.

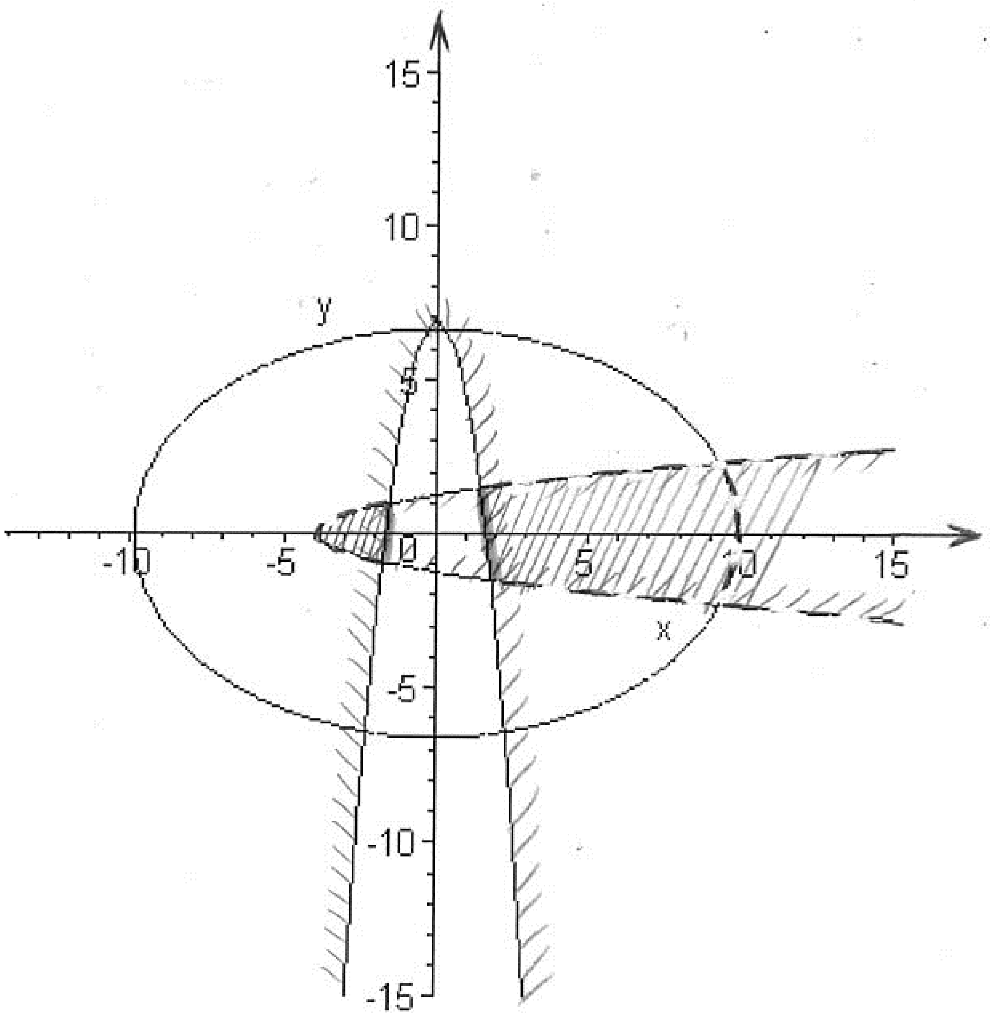
$$Z(x,y)=\frac{\sqrt{2,5x^2+y-7}+\ln\left(-2,5y^2+x+4\right)}{4x^2+9y^2-36\cdot 11}.$$

Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} 2,5x^2+y-7\ge 0,\\ -2,5y^2+x+4>0,\\ 4x^2+9y^2-36\cdot 11\ne 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\ge -2,5x^2+7,\\ x>2,5y^2-4,\\ \dfrac{x^2}{99}+\dfrac{y^2}{44}\ne 1. \end{cases}$$

Первые две линии – это параболы, третья – эллипс. Делаем чертеж, выделяя штриховкой нужную область. При этом первая парабола (вертикальная) входит в область определения (толстая линия), а вторая парабола и границы эллипса – не входят (штриховка).



Задание 2. Проверьте, что $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функции $Z(x, y) = x^n \cdot e^{(m+n)\left(x^{m-5} - \sqrt[n+2]{y^{n+7}}\right)}$.

Решение. $Z(x, y) = x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1} - \sqrt[9]{y^{14}}\right)}$.

Вычисляем производные:

$$Z'_x = \left(x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} \right)'_x = 7x^6 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} + x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$Z'_y = \left(x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} \right)'_y = x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{14}{9} y^{5/9}\right).$$

Теперь вторые частные производные:

$$Z''_{xy} = \left(7x^6 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} + x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)'_y =$$
$$= 7x^6 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{14}{9} y^{5/9}\right) + x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{1}{x^2}\right) 11\left(-\frac{14}{9} y^{5/9}\right).$$

$$Z''_{yx} = \left(x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{14}{9} y^{5/9}\right)\right)'_x =$$
$$= 7x^6 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{14}{9} y^{5/9}\right) + x^7 \cdot e^{11\left(x^{-1}-\sqrt[9]{y^{14}}\right)} 11\left(-\frac{1}{x^2}\right) 11\left(-\frac{14}{9} y^{5/9}\right).$$

Сравнивания выражения, делаем вывод, что $Z''_{xy} = Z''_{yx}$.

Задание 3. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z = \frac{m+1}{2}x^2 + \frac{n+1}{2}y^2$ в точке M_0, принадлежащей поверхности, с координатами $x = 2,\ y = -2$.

Решение. $z = \frac{5}{2}x^2 + 4y^2$.

Найдем значение функции в точке M_0:

$$Z\left(M_0\right)=\frac{5}{2}2^2+4\cdot(-2)^2=10+16=26.$$

Найдем частные производные функции в точке M_0:

$$Z_x'=\left(\frac{5}{2}x^2+4y^2\right)_x'=5x,\ Z_y'=\left(\frac{5}{2}x^2+4y^2\right)_y'=8y.$$

$$Z_x'\left(M_0\right)=10,\ Z_y'\left(M_0\right)=-16.$$

Тогда уравнение нормали:

$$\frac{x-2}{10}=\frac{y+2}{-16}=\frac{z-26}{-1}$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\begin{aligned}&10(x-2)-16(y+2)-1(z-26)=0,\\&10x-16y-z-20-32+26=0,\\&10x-16y-z-26=0.\end{aligned}$$

Задание 4. На координатной плоскости XOY постройте область D, ограниченную линиями

$x=0,\ x=m+1,\ y=(n-m)x$ и

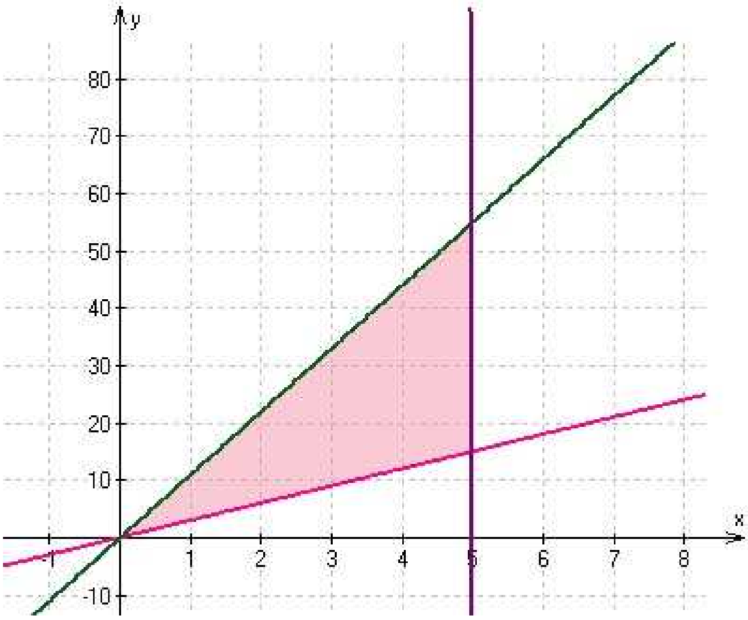
$$y=\begin{cases}(n+m)x,\ если\ m\neq 0,\\ 0,\ если\ m=0.\end{cases}$$

А) с помощью двойного интеграла вычислите площадь области D.

Б) вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^{\frac{m+1}{5}} + y^{\frac{n+1}{3}} \right) dxdy$.

Решение.

Сделаем чертеж области, которая ограничена линиями $x=0,\ x=5,\ y=3x,\ y=11x$:



Площадь области:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int_0^5 dx \int_{3x}^{11x} dy = \int_0^5 (11x - 3x)\,dx = \int_0^5 8xdx = 4x^2\Big|_0^5 = 4\cdot 25 = 100.$$

Вычислим интеграл:

$$\iint_D \left(x + y^{\frac{8}{3}} \right) dxdy = \int_0^5 dx \int_{3x}^{11x} \left(x + y^{\frac{8}{3}} \right) dy = \int_0^5 dx \left(xy + \frac{3}{11} y^{\frac{11}{3}} \right) \Big|_{3x}^{11x} =$$

$$= \int_0^5 \left[x \cdot 11x + \frac{3}{11} (11x)^{\frac{11}{3}} - x \cdot 3x - \frac{3}{11} (3x)^{\frac{11}{3}} \right] dx =$$

$$= \int_0^5 \left[8x^2 + \frac{3}{11} \left(8^{11/3} - 6^{11/3} \right) x^{\frac{11}{3}} \right] dx = \left(\frac{8}{3} x^3 + \frac{3}{11} \left(8^{11/3} - 6^{11/3} \right) \frac{3}{14} x^{\frac{14}{3}} \right) \Big|_0^5 =$$

$$= \frac{8}{3} 5^3 + \frac{3}{11} \left(8^{11/3} - 6^{11/3} \right) \frac{3}{14} 5^{\frac{14}{3}} \approx 697410.$$

Задание 5. Напишите и проверьте формулу Остроградского-Грина для силы $\overline{F} = \left((m+1) x^3 ; -(m+n) xy \right)$ по контуру треугольника с вершинами $A(m+1;n)$, $B(m+2;n+1)$, $C(m+1;n+2)$.

Решение.

$\overline{F} = \left(5x^3 ; -11xy \right)$, $A(5;7)$, $B(6;8)$, $C(5;9)$.

Сделаем схематический чертеж треугольника, найдем уравнения его сторон.

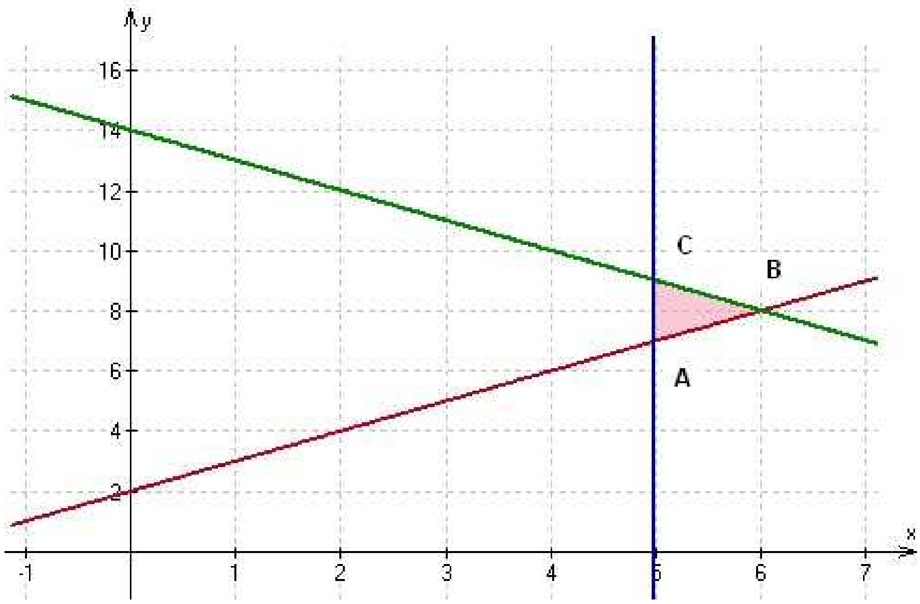
$AC: x = 5$

$AB:$

$$\frac{x-5}{6-5}=\frac{y-7}{8-7},$$
$$x-5=y-7,$$
$$y=x+2.$$

$BC:$

$$\frac{x-6}{5-6}=\frac{y-8}{9-8},$$
$$x-6=-y+8,$$
$$y=-x+14.$$



Формула Остроградского-Грина: $\int\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D \left(Q_x^{'}-P_y^{'}\right)dxdy$.

Получаем:

$$\int_L 5x^3dx - 11xydy = \iint_D (-11y - 0)\,dxdy = -11\iint_D ydxdy = -11\int_5^6 dx \int_{x+2}^{-x+14} ydy =$$

$$= -\frac{11}{2}\int_5^6 dx \cdot y^2\Big|_{x+2}^{-x+14} = -\frac{11}{2}\int_5^6 \left((-x+14)^2 - (x+2)^2\right)dx = -\frac{11}{2}\int_5^6 (192 - 32x)\,dx =$$

$$= -88\int_5^6 (12 - 2x)\,dx = -88\left(12x - x^2\right)\Big|_5^6 = -88\left((12\cdot 6 - 36) - (12\cdot 5 - 25)\right) = -88.$$

Теперь вычислим интеграл непосредственно по контуру треугольника.

$$\int_L 5x^3dx - 11xydy =$$

$$= \int_{AB} 5x^3dx - 11xydy + \int_{BC} 5x^3dx - 11xydy + \int_{CA} 5x^3dx - 11xydy =$$

$$= \int_5^6 \left[5x^3 - 11x(x+2)\right]dx + \int_6^5 \left[5x^3 + 11x(-x+14)\right]dx + \int_9^7 (-11\cdot 5y)\,dy =$$

$$= \int_5^6 \left[5x^3 - 11x^2 - 22x\right]dx + \int_6^5 \left[5x^3 - 11x^2 + 154x\right]dx - 55\int_9^7 ydy =$$

$$= \int_5^6 \left[5x^3 - 11x^2 - 22x - 5x^3 + 11x^2 - 154x\right]dx + 55\int_7^9 ydy =$$

$$= -176\int_5^6 xdx + 55\int_7^9 ydy = -88\,x^2\Big|_5^6 + \frac{55}{2}y^2\Big|_7^9 = -88(36 - 25) + \frac{55}{2}(81 - 49) = -88.$$

Результаты совпали.