Расчетно-графическая работа

Операционное исчисление

Задача 1.

По заданному оригиналу

$f(t)$ найти изображение.

3. $f(t) = 3t^2 - e^{-4t}\sin(2t+3) + 1.$

Решение

Используя справочник оригиналов и изображении получаем

$$f(t) = 3t^2 - e^{-4t}\sin(2t+3) + 1 = 3t^2 - e^{-4t}(\sin 2t\cos 3 - \cos 2t\sin 3) + 1 =$$

$$= 3t^2 - e^{-4t}\sin 2t\cos 3 + e^{-4t}\cos 2t\sin 3 + 1 \to 3\frac{2!}{p^{2+1}} - \cos 3\frac{2}{(p+4)^2+2^2} + \sin 3\frac{p+4}{(p+4)^2+2^2} + \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{6}{p^3} - \cos 3\frac{2}{p^2+8p+20} + \sin 3\frac{p+4}{p^2+8p+20} + \frac{1}{p}$$

Задача 2.

По заданному изображению $F(p)$ найти оригинал.

3. $F(p)=\dfrac{2p^3-3p^2+7p-8}{p(p^2-2p+2)^2}$.

Решение

Разложим дробь на слагаемые

$$F(p)=\frac{2p^3-3p^2+7p-8}{p(p^2-2p+2)^2}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2-2p+2}+\frac{Dp+E}{(p^2-2p+2)^2}=$$

$$=\frac{A(p^2-2p+2)^2+p(Bp+C)(p^2-2p+2)+p(Dp+E)}{p(p^2-2p+2)^2}$$

$$A(p^2-2p+2)^2+p(Bp+C)(p^2-2p+2)+p(Dp+E)=2p^3-3p^2+7p-8$$

$$A(p^4+4p^2+4-4p^3+4p^2-8p)+p(Bp^3-2Bp^2+2Bp+Cp^2-2Cp+2C)+Dp^2+Ep=$$
$$=2p^3-3p^2+7p-8$$

$$Ap^4-4Ap^3+8Ap^2-8Ap+4A+Bp^4-2Bp^3+2Bp^2+Cp^3-2Cp^2+2Cp+Dp^3+Ep^2=$$
$$=2p^3-3p^2+7p-8$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-4A-2B+C=2\\8A+2B-2C+D=-3\\8A+2C+E=7\\4A=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=2\\C=-2\\D=5\\E=-13\end{cases}$$

$$\frac{2p^3-3p^2+7p-8}{p(p^2-2p+2)^2}=\frac{-2}{p}+\frac{2p-2}{p^2-2p+2}+\frac{5p-13}{(p^2-2p+2)^2}$$

Преобразуем выражение

$$\frac{2p^3-3p^2+7p-8}{p\left(p^2-2p+2\right)^2}=\frac{-2}{p}+\frac{2p-2}{p^2-2p+2}+\frac{5p-13}{\left(p^2-2p+2\right)^2}=\frac{-2}{p}+\frac{2p-2}{(p-1)^2+1^2}+\frac{5p-13}{\left((p-1)^2+1^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-2}{p}+2\frac{p-1}{(p-1)^2+1^2}+\frac{5p-15+2}{\left((p-1)^2+1^2\right)^2}=\frac{-2}{p}+2\frac{p-1}{(p-1)^2+1^2}+5\frac{p-1}{\left((p-1)^2+1^2\right)^2}+10\frac{1}{\left((p-1)^2+1^2\right)^2}$$

Тогда, получаем

$$F(p)\to -2\eta(t)+2e^t\cos t+5te^t\cos t+10te^t\sin t$$

Задача 3.

Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом $(x = x(t))$.

3. $x'' - 3x' = t^2 - 1.$

Решение

Пусть $x(t) \to X(p)$, тогда $x'(t) \to pX(p) - C_1$ и $x''(t) \to p^2 X(p) - pC_1 - C_2$

$t^2 - 1 \to \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{1}{p}$, тогда получаем

$$x'' - 3x' = t^2 - 1 \Rightarrow p^2 X(p) - pC_1 - C_2 - 3\left(pX(p) - C_1\right) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}$$

$$\left(p^2 - 3p\right) X(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + (p-3)C_1 + C_2$$

$$X(p) = \frac{\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + (p-3)C_1 + C_2}{p^2 - 3p} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p(p-3)} + \frac{2 - p^2}{p^4(p-3)}$$

Разложим каждую дробь на слагаемые

$$\frac{C_2}{p(p-3)} = C_2 \frac{1}{p(p-3)} = -\frac{C_2}{3} \frac{-3}{p(p-3)} = -\frac{C_2}{3} \frac{-p + p - 3}{p(p-3)} = \frac{C_2}{3} \frac{1}{p-3} - -\frac{C_2}{3} \frac{1}{p}$$

$$\frac{2 - p^2}{p^4(p-3)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p^2} + \frac{D}{p^3} + \frac{E}{p^4} = \frac{Ap^4 + B(p-3)p^3 + C(p-3)p^2 + D(p-3)p + E(p-3)}{p^4(p-3)}$$

$$Ap^4 + B(p-3)p^3 + C(p-3)p^2 + D(p-3)p + E(p-3) = 2 - p^2$$

$$Ap^4 + Bp^4 - 3Bp^3 + Cp^3 - 3Cp^2 + Dp^2 - 3Dp + Ep - 3E = 2 - p^2$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3B+C=0 \\ -3C+D=-1 \\ 3D+E=0 \\ -3E=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{5}{3} \\ B=\dfrac{5}{3} \\ C=-\dfrac{5}{3} \\ D=\dfrac{2}{3} \\ E=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2-p^2}{p^4(p-3)}=-\frac{5}{3}\frac{1}{p-3}+\frac{5}{3}\frac{1}{p}-\frac{5}{3}\frac{1}{p^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{p^3}-\frac{2}{3}\frac{1}{p^4}$$

Значит,

$$X(p)=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p(p-3)}+\frac{2-p^2}{p^4(p-3)}=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{3}\frac{1}{p-3}-$$
$$-\frac{C_2}{3}\frac{1}{p}-\frac{5}{3}\frac{1}{p-3}+\frac{5}{3}\frac{1}{p}-\frac{5}{3}\frac{1}{p^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{p^3}-\frac{2}{3}\frac{1}{p^4}$$

Тогда, получаем

$$X(p)\to\left(C_1-\frac{C_2}{3}+\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{C_2}{3}-\frac{5}{3}\right)e^{3t}-\frac{5}{3}t+\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t^3$$

Задача 4.

Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом $(x = x(t))$.

3. $x'' + 3x' - 4x = (3t-1)e^{-2t}$.

Решение

Пусть $x(t) \to X(p)$, тогда $x'(t) \to pX(p) - C_1$ и $x''(t) \to p^2X(p) - pC_1 - C_2$

$(3t-1)e^{-2t} = 3te^{-2t} - e^{-2t} \to \dfrac{3}{(p+2)^2} - \dfrac{1}{p+2}$, тогда получаем

$$x'' + 3x' + 4x = (3t-1)e^{-2t} \Rightarrow p^2X(p) - pC_1 - C_2 + 3(pX(p) - C_1) + 4X(p) = \frac{3}{(p+2)^2} - \frac{1}{p+2}$$

$$(p^2+3p+4)X(p) = \frac{3}{(p+2)^2} - \frac{1}{p+2} + pC_1 + C_2 + 3C_1$$

$$X(p) = \frac{\dfrac{3}{(p+2)^2} - \dfrac{1}{p+2} + pC_1 + C_2 + 3C_1}{p^2+3p+4} = \frac{3}{(p+2)^2(p^2+3p+4)} - \frac{1}{(p+2)(p^2+3p+4)} +$$

$$+\frac{pC_1 + C_2 + 3C_1}{p^2+3p+4} = \frac{1-p}{(p+2)^2(p^2+3p+4)} + \frac{pC_1 + C_2 + 3C_1}{p^2+3p+4}$$

Разложим каждую дробь на слагаемые

$$\frac{1-p}{(p+2)^2(p^2+3p+4)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+3p+4} = \frac{A(p+2)(p^2+3p+4) + B(p^2+3p+4) + (Cp+D)(p+2)^2}{(p+2)^2(p^2+3p+4)}$$

$$A(p+2)(p^2+3p+4) + B(p^2+3p+4) + (Cp+D)(p+2)^2 = 1-p$$

$$A(p^3+3p^2+4p+2p^2+6p+8) + (Bp^2+3Bp+4B) + (Cp+D)(p^2+4p+4) = 1-p$$

$$Ap^3 + 5Ap^2 + 10Ap + 8A + Bp^2 + 3Bp + 4B + Cp^3 + 4Cp^2 + 4Cp + Dp^2 + 4Dp + 4D = 1-p$$

$$8A + 4B + 4D = 1 - p$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 5A+B+4C+D=0 \\ 10A+3B+4C+4D=-1 \\ 8A+4B+4D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=\dfrac{3}{2} \\ C=\dfrac{-1}{4} \\ D=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Получаем

$$\frac{1-p}{(p+2)^2\left(p^2+3p+4\right)}=\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p+2\right)^2}-\frac{1}{4}\frac{p+7}{p^2+3p+4}$$

$$X(p)=\frac{1-p}{(p+2)^2\left(p^2+3p+4\right)}+\frac{pC_1+C_2+3C_1}{p^2+3p+4}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p+2\right)^2}-\frac{1}{4}\frac{p+7}{p^2+3p+4}+\frac{pC_1+C_2+3C_1}{p^2+3p+4}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p+2\right)^2}+\frac{pC_1+C_2+3C_1-\frac{1}{4}p-\frac{7}{4}}{p^2+3p+4}=$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p+2\right)^2}+\frac{pC_1+C_2+3C_1-\frac{1}{4}p-\frac{7}{4}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p+2\right)^2}+\frac{\left(C_1-\frac{1}{4}\right)p+\left(C_2+3C_1-\frac{7}{4}\right)}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p+2\right)^2}+\left(C_1-\frac{1}{4}\right)\frac{p+\frac{3}{2}+\left(C_2+3C_1-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\left(C_1-\frac{1}{4}\right)\right)}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{p+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{(p+2)^2}+\left(C_1-\frac{1}{4}\right)\frac{p+\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\left(C_2+\frac{3}{2}C_1-\frac{11}{8}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$X(p)\to\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{3}{2}te^{-2t}+\left(C_1-\frac{1}{4}\right)e^{-2t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\left(C_2+\frac{3}{2}C_1-\frac{11}{8}\right)e^{-2t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

Задача 5.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения операционным методом $(x = x(t))$.

3. $4x'' + 3x' + x = cht, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = 1.$

Решение

Пусть $x(t) \to X(p)$, тогда $x'(t) \to pX(p) - 2$ и $x''(t) \to p^2 X(p) - 2pC_1 - 1$

$cht = \dfrac{p}{p^2 - 1}$, тогда получаем

$$4x'' + 3x' + x = cht \Rightarrow p^2 X(p) - 2p - 1 + 3(pX(p) - 2) + X(p) = \frac{p}{p^2 - 1}$$

$$\left(4p^2 + 3p + 1\right) X(p) = \frac{p}{p^2 - 1} + 2p + 7$$

$$X(p) = \frac{\frac{p}{p^2 - 1} + 2p + 7}{4p^2 + 3p + 1} = \frac{p + (2p + 7)\left(p^2 - 1\right)}{\left(p^2 - 1\right)\left(4p^2 + 3p + 1\right)} = \frac{p + 2p^3 - 2p + 7p^2 - 7}{\left(p^2 - 1\right)\left(4p^2 + 3p + 1\right)} = \frac{2p^3 + 7p^2 - p - 7}{\left(p^2 - 1\right)\left(4p^2 + 3p + 1\right)}$$

Разложим дробь на слагаемые

$$\frac{2p^3 + 7p^2 - p - 7}{\left(p^2 - 1\right)\left(4p^2 + 3p + 1\right)} = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{p + 1} + \frac{Cp + D}{4p^2 + 3p + 1} = \frac{\begin{array}{l} A(p + 1)(4p^2 + 3p + 1) + B(p - 1)\left(4p^2 + 3p + 1\right) + \\ + (Cp + D)\left(p^2 - 1\right) \end{array}}{\left(p^2 - 1\right)\left(4p^2 + 3p + 1\right)}$$

$$A(p + 1)(4p^2 + 3p + 1) + B(p - 1)\left(4p^2 + 3p + 1\right) + (Cp + D)\left(p^2 - 1\right) = 2p^3 + 7p^2 - p - 7$$

$$A\left(4p^3 + 3p^2 + p + 4p^2 + 3p + 1\right) + B\left(4p^3 + 3p^2 + p - 4p^2 - 3p - 1\right) + \left(Cp^3 - Cp + Dp^2 - D\right) =$$

$$= 2p^3 + 7p^2 - p - 7$$

$$4Ap^3 + 7Ap^2 + 4Ap + A + 4Bp^3 - Bp^2 - 2Bp - B + Cp^3 - Cp + Dp^2 - D = 2p^3 + 7p^2 - p - 7$$

$$A - B - D = 2p^3 + 7p^2 - p - 7$$

$$\begin{cases} 4A+4B+C=2 \\ 7A-B+D=7 \\ 4A-2B-C=-1 \\ A-B-D=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{16} \\ B=\dfrac{1}{4} \\ C=\dfrac{3}{4} \\ D=\dfrac{109}{16} \end{cases}$$

$$\frac{2p^3+7p^2-p-7}{(p^2-1)(4p^2+3p+1)}=\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{\frac{3}{4}p+\frac{109}{16}}{4p^2+3p+1}=\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{3}{16}\frac{p+\frac{109}{12}}{p^2+\frac{3}{4}p+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{3}{16}\frac{p+\frac{109}{12}}{\left(p+\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{3}{16}\frac{p+\frac{3}{8}-\frac{209}{24}}{\left(p+\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{3}{16}\frac{p+\frac{3}{8}}{\left(p+\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}-\frac{627}{384}\frac{1}{\left(p+\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$X(p)\to\frac{1}{16}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{16}e^{-\frac{3}{8}t}\cos\frac{t}{8}-\frac{627}{384}e^{-\frac{3}{8}t}\sin\frac{t}{8}$$

Задача 6.

Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом $(x = x(t))$.

3. $tx'' + 2x' - tx = 0.$

Решение

Пусть $x(t) \to X(p)$, тогда $x'(t) \to pX(p) - C_1$ и $x''(t) \to p^2 X(p) - pC_1 - C_2$

$$t \to \frac{1}{p}$$

Получим:

$$tx'' + 2x' - tx = 0 \Rightarrow \frac{1}{p}\left(p^2 X(p) - pC_1 - C_2\right) + 2\left(pX(p) - C_1\right) - \frac{1}{p}X(p) = 0$$

$$pX(p) - C_1 - \frac{C_2}{p} + pX(p) - C_1 - \frac{1}{p}X(p) = 0$$

$$p^2 X(p) - C_1 p - C_2 + p^2 X(p) - C_1 p - X(p) = 0$$

$$-C_1 p - C_2 - C_1 p = 0$$

$$X(p)(2p^2 - 1) = 2C_1 p + C_2$$

$$X(p) = \frac{2C_1 p + C_2}{2p^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{2C_1 p + C_2}{\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(p - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{A}{p + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\frac{B}{p - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{A\left(p - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + B\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2p^2 - 1}$$

Выразим константы:

$$A\left(p-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+B\left(p+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2C_1p+C_2$$

$$Ap-\frac{\sqrt{2}}{2}A+Bp+\frac{\sqrt{2}}{2}B=2C_1p+C_2$$

$$\begin{cases} A+B=2C_1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}B=C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2 \\ B=C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2 \end{cases}$$

Окончательно:

$$X(p)=\frac{2C_1p+C_2}{2p^2-1}=\frac{1}{2}\frac{C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2}{p+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}\frac{C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2}{p-\frac{\sqrt{2}}{2}}\to\frac{C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}+\frac{C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}$$

Задача 7.

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений операционным методом $(x = x(t), y = y(t))$.

$$3.\ \begin{cases} x' = 3x - 4y + 1, \\ y' = 5x - y + 7, \quad x(0) = 1, y(0) = -1. \end{cases}$$

Решение

Пусть $x(t) \to X(p), y(t) \to Y(p)$, тогда $x'(t) \to pX(p) - 1, y'(t) \to pY(p) + 1$

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 1, \\ y' = 5x - y + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) - 1 = 3X(p) - 4Y(p) + 1, \\ pY(p) + 1 = 5X(p) - Y(p) + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-3)X(p) + 4Y(p) = 2 \\ -5X(p) + (p+1) = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-3 & 4 \\ -5 & p+1 \end{vmatrix} = (p-3)(p+1) + 20 = p^2 - 2p + 17$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & p+1 \end{vmatrix} = 2(p+1) - 24 = 2p - 22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-3 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 2(p-3) + 10 = 2p + 4$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2p-22}{p^2-2p+17} = 2\frac{p-11}{(p-1)^2+4^2} = 2\frac{p-1-10}{(p-1)^2+4^2} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2} - 20\frac{1}{(p-1)^2+4^2}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2p+4}{p^2-2p+17} = 2\frac{p+2}{(p-1)^2+4^2} = 2\frac{p-1+3}{(p-1)^2+4^2} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2} + 6\frac{1}{(p-1)^2+4^2}$$

Значит, получаем

$$x(t) = 2e^t \cos 4t - 20e^t \sin 4t, \ y(t) = 2e^t \cos 4t + 6e^t \sin 4t$$