Контрольная работа № 1

Теория вероятностей

Задача 1.1. В ящике находится 75 кондиционных и 16 бракованных однотипных деталей. Какова вероятность того, что среди трех наудачу выбранных деталей окажется хотя бы одна бракованная?

Решение.

Пусть событие A – среди трех выбранных наудачу изделий окажется хотя бы одно бракованное изделие, т.е. или одно, или два, или три бракованных изделия.

Для события A противоположным является событие $\overline{A}$ – среди трех выбранных наудачу изделий не окажется ни одного бракованного изделия. Тогда

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Вычислим вероятность события $\overline{A}$. Общее число всех случаев, которыми можно отобрать 3 изделия из $75+16=91$, есть $n=C_{91}^3$. Найдем число способов, которыми можно выбрать три кондиционных изделия из 75 кондиционных изделий, лежащих в ящике, т.е. C_{75}^3. Тогда общее число случаев благоприятствующих событию $\overline{A}$, равно $m=C_{75}^3$. Итак,

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_{75}^3}{C_{91}^3}=\frac{\dfrac{75!}{3!\cdot 72!}}{\dfrac{91!}{3!\cdot 88!}}=\frac{\dfrac{72!\cdot 73\cdot 74\cdot 75}{72!\cdot 2\cdot 3}}{\dfrac{88!\cdot 89\cdot 90\cdot 91}{88!\cdot 2\cdot 3}}=\frac{73\cdot 37\cdot 25}{89\cdot 15\cdot 91}=\frac{13505}{24297}.$$

Тогда

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{13505}{24297}=\frac{24297-13505}{24297}=\frac{10792}{24297}\approx 0{,}4442.$$

Ответ: $P(A)=0{,}4442$.

Задача 1.2. Группа состоит из 7 отличников, 15 хорошо успевающих студентов и 38 студентов, успевающих посредственно. Отличник отвечает на 5 и 4 с равной вероятностью, хорошист отвечает на 5, 4 и 3 с равной вероятностью, и посредственно успевающий студент отвечает на 4, 3 и 2 с равной вероятностью. Случайно выбранный студент ответил на 4. Какова вероятность того, что был вызван посредственно успевающий студент?

Решение.

Пусть событие A – случайно выбранный студент ответил на «4».

Обозначим события:

событие B_1 – был выбран студент-отличник,

событие B_2 – был выбран хорошо успевающий студент,

событие B_3 – был выбран посредственно успевающий студент.

Найдем вероятность события B_1: $P(B_1)$. Так как всего в группе $n = n_1 + n_2 + n_3 = 7 + 15 + 38 = 60$ студентов, а отличников $n_1 = 7$ человек, то по формуле классической вероятности: $P(B_1) = \frac{n_1}{n} = \frac{7}{60}$.

Аналогично находим вероятности $P(B_2) = \frac{n_2}{n} = \frac{15}{60}$; $P(B_3) = \frac{n_3}{n} = \frac{38}{60}$.

Вероятности условных событий: вероятность того, что студент ответил на «4» при условии, что он отличник $P_{B_1}(A) = \frac{1}{2}$ (отвечает на 5 и 4 с равной вероятностью); вероятность того, что ответил на «4» при условии, что он из числа хорошо успевающих студентов $P_{B_2}(A) = \frac{1}{3}$; и вероятность того, что студент ответил на «4» при условии, что он посредственно успевающий студент $P_{B_3}(A) = \frac{1}{3}$.

Вероятность того, что случайно выбранный студент ответил на «4», вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A);$$

$$P(A)=\frac{7}{60}\cdot\frac{1}{2}+\frac{15}{60}\cdot\frac{1}{3}+\frac{38}{60}\cdot\frac{1}{3}=\frac{21+30+76}{60\cdot 6}=\frac{127}{360}\approx 0{,}3528$$

Вероятность того, что студент, ответивший на «4» оказался посредственно успевающим студентом, по формуле Бейеса

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{38}{60}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{127}{360}}=\frac{38\cdot 360}{60\cdot 3\cdot 127}=\frac{76}{127}=0{,}5984$$

Ответ: $P_A(B_3)=\frac{76}{127}$.

Задача 1.3. Известно, что в большой партии деталей имеется 22 % бракованных. Для проверки выбирается 100 деталей. Какова вероятность того, что среди них найдется не более 15 бракованных? Оценить ответ с использованием теоремы Муавра-Лапласа.

Решение.

Рассматривается схема Бернулли, где $n=100$, $p=0{,}22$, $q=1-p=1-0{,}22=0{,}78$. Успехом считается обнаружить бракованную деталь, и число успехов удовлетворяет неравенству $0\le k\le 15$. Следовательно,

$$P=P_{100}^0+P_{100}^1+P_{100}^2+\ldots+P_{100}^{15}.$$

Прямой подсчет дает:

$$P_{100}^0=C_{100}^0p^0q^{100}=0{,}78^{100}=\quad 0{,}00000000002$$
$$P_{100}^1=C_{100}^1p^1q^{99}=100\cdot 0{,}22\cdot 0{,}78^{99}=\quad 0{,}00000000046$$
$$P_{100}^2=C_{100}^2p^2q^{98}=C_{100}^2\cdot 0{,}22^2\cdot 0{,}78^{98}=\quad 0{,}00000000638$$
$$P_{100}^3=C_{100}^3p^3q^{97}=C_{100}^3\cdot 0{,}22^3\cdot 0{,}78^{97}=\quad 0{,}00000005877$$
$$P_{100}^4=C_{100}^4p^4q^{96}=C_{100}^4\cdot 0{,}22^4\cdot 0{,}78^{96}=\quad 0{,}00000040197$$
$$P_{100}^5=C_{100}^5p^5q^{95}=C_{100}^5\cdot 0{,}22^5\cdot 0{,}78^{95}=\quad 0{,}00000217683$$
$$P_{100}^6=C_{100}^6p^6q^{94}=C_{100}^6\cdot 0{,}22^6\cdot 0{,}78^{94}=\quad 0{,}00000972129$$

$$P_{100}^{7}=C_{100}^{7}p^{7}q^{93}=C_{100}^{7}\cdot 0{,}22^{7}\cdot 0{,}78^{93}=\quad 0{,}00003681985$$
$$P_{100}^{8}=C_{100}^{8}p^{8}q^{92}=C_{100}^{8}\cdot 0{,}22^{8}\cdot 0{,}78^{92}=\quad 0{,}00012072661$$
$$P_{100}^{9}=C_{100}^{9}p^{9}q^{91}=C_{100}^{9}\cdot 0{,}22^{9}\cdot 0{,}78^{91}=\quad 0{,}00034807787$$
$$P_{100}^{10}=C_{100}^{10}p^{10}q^{90}=C_{100}^{10}\cdot 0{,}22^{10}\cdot 0{,}78^{90}=\quad 0{,}00089339986$$
$$P_{100}^{11}=C_{100}^{11}p^{11}q^{89}=C_{100}^{11}\cdot 0{,}22^{11}\cdot 0{,}78^{89}=\quad 0{,}00206169199$$
$$P_{100}^{12}=C_{100}^{12}p^{12}q^{88}=C_{100}^{12}\cdot 0{,}22^{12}\cdot 0{,}78^{88}=\quad 0{,}00431281295$$
$$P_{100}^{13}=C_{100}^{13}p^{13}q^{87}=C_{100}^{13}\cdot 0{,}22^{13}\cdot 0{,}78^{87}=\quad 0{,}00823432533$$
$$P_{100}^{14}=C_{100}^{14}p^{14}q^{86}=C_{100}^{14}\cdot 0{,}22^{14}\cdot 0{,}78^{86}=\quad 0{,}01443269109$$
$$P_{100}^{15}=C_{100}^{15}p^{15}q^{85}=C_{100}^{15}\cdot 0{,}22^{15}\cdot 0{,}78^{85}=\quad 0{,}02333901842$$

Следовательно, $P=0{,}05379$. Теперь применим интегральную теорему Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $k_1=0$, $k_2=15$.

Тогда имеем

$$x_1=\frac{0-100\cdot 0{,}22}{\sqrt{100\cdot 0{,}22\cdot 0{,}78}}=5{,}31;\qquad x_2=\frac{15-100\cdot 0{,}22}{\sqrt{100\cdot 0{,}22\cdot 0{,}78}}=-1{,}69.$$

$$P_{100}(k\le 15)=P_{100}(0\le k\le 15)=\Phi(-1{,}69)-\Phi(-5{,}31)=$$
$$=\Phi(5{,}31)-\Phi(1{,}69)=0{,}5-0{,}4545=0{,}0455.$$

Ошибка приближенного вычисления не превышает:

$$\frac{0{,}00829}{0{,}0455}=0{,}1822=18\%$$

<u>**Задача 1.4.**</u> Производится последовательное бросание двух игральных костей. При выпадении на одной игральной кости одного, трех или пяти очков игрок лишается 7 рублей. При выпадении двух или четырех очков игрок получает 8 рублей. При выпадении шести очков игрок лишается 15 рублей. Случайная величина ξ есть выигрыш игрока при двух бросаниях костей. Найти закон распределения ξ, построить график функции распределения, найти математическое ожидание и дисперсию ξ.

Решение.

Рассмотрим сначала, чему равен выигрыш игрока при одном бросании кубика. Пусть событие A состоит в том, что выпало 1, 3 или 5 очков. Тогда $P(A)=\frac{1}{2}$, а выигрыш составит – 7 рублей. Пусть событие B состоит в том, что выпало 2 или 4 очка. Тогда $P(B)=\frac{1}{3}$, а выигрыш составит 8 рублей. Наконец, пусть событие C означает выпадение 6 очков. Тогда $P(C)=\frac{1}{6}$ и выигрыш равен – 15 рублей.

Теперь рассмотрим все возможные комбинации событий A, B и C при двух бросаниях кости, и определим значения выигрыша ξ при каждой такой комбинации.

Если произошло событие $A\cdot A$, то $\xi=-7-7=-14$, при этом $P(A\cdot A)=P(A)\cdot P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Если произошло событие $A\cdot B$, то $\xi=-7+8=1$, при этом $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Если произошло событие $A\cdot C$, то $\xi=-7-15=-22$, при этом $P(A\cdot C)=P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

Аналогично, при $B\cdot A$ получаем $\xi=8-7=1$, $P(B\cdot A)=P(B)\cdot P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

При $B\cdot B$, $\xi=8+8=16$, $P(B\cdot B)=P(B)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

При $B\cdot C$, $\xi=8-15=-7$, $P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$.

При $C\cdot A$, $\xi=-15-7=-22$, $P(C\cdot A)=P(C)\cdot P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

При $C\cdot B$, $\xi=-15+8=-7$, $P(C\cdot B)=P(C)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$.

При $C\cdot C$, $\xi=-15-15=-30$, $P(C\cdot C)=P(C)\cdot P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Все найденные состояния ξ и суммарные вероятности этих состояний записываем в таблицу:

ξ	– 30	– 22	– 14	– 7	1	16
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Проверяем выполнение закона вероятностной нормировки:

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1+6+9+4+12+4}{36}=1.$$

Найдем математическое ожидание ξ:

$$M(\xi)=-30\cdot\frac{1}{36}-22\cdot\frac{1}{6}-14\cdot\frac{1}{4}-7\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{1}{3}+16\cdot\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{-30-132-126-28+12+64}{36}=-\frac{240}{36}=-\frac{20}{3}.$$

Найдем дисперсию

$$D(\xi)=(-30)^2\cdot\frac{1}{36}+(-22)^2\cdot\frac{1}{6}+(-14)^2\cdot\frac{1}{4}+(-7)^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{1}{3}+16^2\cdot\frac{1}{9}-\left(-\frac{20}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{900+2904+1764+196+12+1024-1600}{36}=\frac{5200}{36}=\frac{1300}{9}.$$

По определению функции распределения находим:

если $x\le-30$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

если $-30<x\le-22$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=-30)=\frac{1}{36}=0{,}0278$;

если $-22<x\le-14$, то

$$F(x)=P(X=-30)+P(X=-22)=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}=0{,}1944;$$

если $-14<x\le-7$, то

$$F(x)=P(X=-30)+P(X=-22)+P(X=-14)=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}=0{,}4444;$$

если $-7<x\le 1$, то

$$F(x)=P(X=-30)+P(X=-22)+P(X=-14)+P(X=-7)=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}=0{,}5556;$$

если $1<x\le 16$, то

$$F(x)=P(X=-30)+P(X=-22)+P(X=-14)+P(X=-7)+P(X=1)=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}=0{,}8889;$$

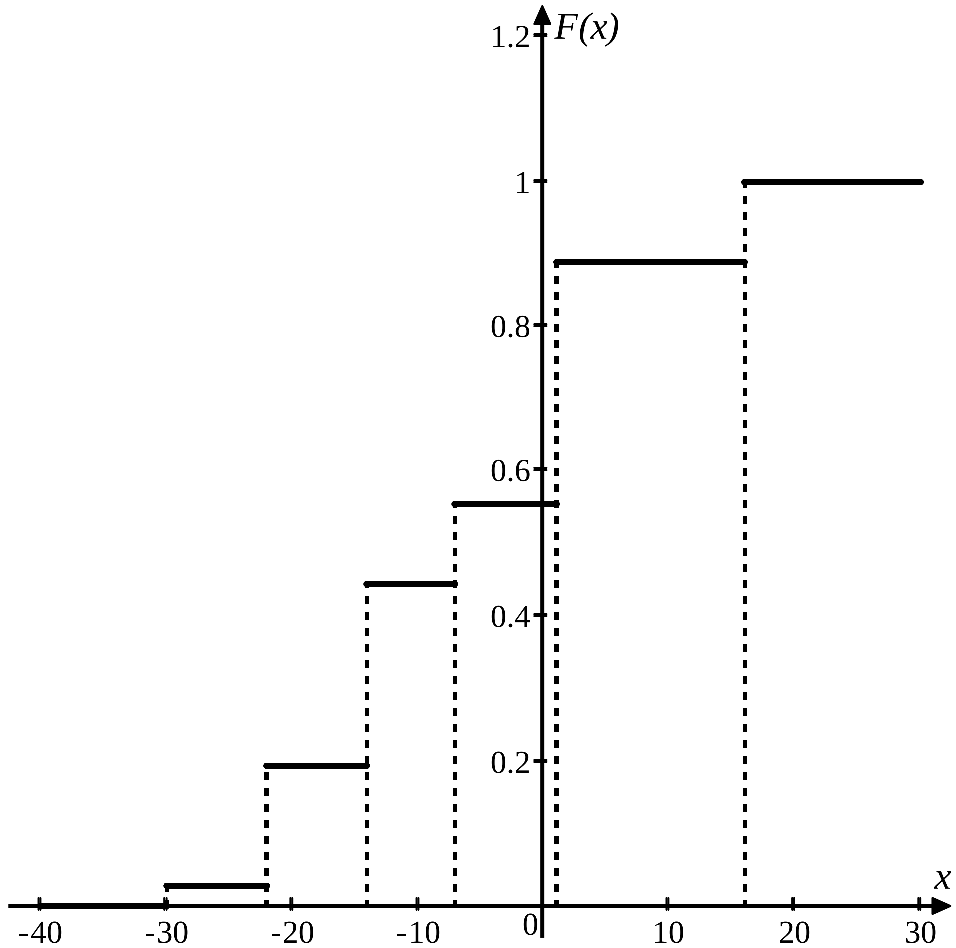
если $x>16$, то

$$F(x)=P(X=-30)+P(X=-22)+P(X=-14)+P(X=-7)+P(X=1)+P(X=16)=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{36}{36}=1.$$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -30,\\ 0{,}0278, & \text{если } -30<x\le -22,\\ 0{,}1944, & \text{если } -22<x\le -14,\\ 0{,}4444, & \text{если } -14<x\le -7,\\ 0{,}5556, & \text{если } -7<x\le 1,\\ 0{,}8889 & \text{если } 1<x\le 16,\\ 1, & \text{если } x>16.\end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$



<u>Задача 1.5.</u> Для случайной величины, распределенной по закону косинуса с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<-\dfrac{7\pi}{2},\ \ x>\dfrac{7\pi}{2},\\ C\cos\dfrac{x}{7}, & \text{при } x\in\left[-\dfrac{7\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right]\end{cases}$$

найти константу *C*, вероятность попадания в интервал $\left(-\dfrac{7\pi}{2},4\pi\right)$, а также математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Параметр C определим, исходя из следующего свойства плотности распределения непрерывной случайной величины:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

В данном случае запишем

$$\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2} C\cdot\cos\frac{x}{7}dx=1.$$

Вычислим интеграл и разрешим выражение относительно параметра C.

$$C\cdot\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}\cos\frac{x}{7}dx=1;$$

$$C\cdot 7\sin\frac{x}{7}\Big|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}=1;$$

$$7C\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1;$$

$$7C\cdot(1+1)=1;$$

$$14\cdot C=1;$$

$$C=\frac{1}{14}.$$

Тогда функция плотности распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{7\pi}{2},\\ \frac{1}{14}\cos\frac{x}{7}, & -\frac{7\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{7\pi}{2}.\end{cases}$$

Для определения вероятности попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал воспользуемся формулой

$$P(a\le X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Определим вероятность попадания в интервал $\left(-\frac{7\pi}{2},4\pi\right)$. В данном случае получаем

$$P\left(-\frac{7\pi}{2}<X<4\pi\right)=\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}\frac{1}{14}\cdot\cos\frac{x}{7}dx+\int_{7\pi/2}^{4\pi}0\,dx=\frac{1}{14}\cdot\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}\cos\frac{x}{7}dx=$$

$$=\frac{1}{14}\cdot\left(7\sin\frac{x}{7}\right)\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)=1.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется формулой: $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$. В данном случае получаем

$$M(X)=\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}x\cdot\frac{1}{14}\cdot\cos\frac{x}{7}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx;\\ dv=\frac{1}{14}\cos\frac{x}{7}dx; & v=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{7}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}x\sin\frac{x}{7}\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}-\frac{1}{2}\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}\sin\frac{x}{7}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{7\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-7\cos\frac{x}{7}\right)\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7\pi}{2}\cdot1-\frac{7\pi}{2}\cdot1\right)+\frac{7}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot0+\frac{7}{2}\cdot(0-0)=0.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины можно определить по формуле: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2$.

$$D(X)=\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}x^2\cdot\frac{1}{14}\cdot\cos\frac{x}{7}dx-0^2=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x^2; & du=2x\,dx;\\ dv=\frac{1}{14}\cos\frac{x}{7}dx; & v=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{7}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}x^2\sin\frac{x}{7}\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}-\int_{-7\pi/2}^{7\pi/2}x\sin\frac{x}{7}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx;\\ dv=\sin\frac{x}{7}dx; & v=-7\cos\frac{x}{7}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}x^2\sin\frac{x}{7}\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}-$$

$$-\left(-7x\cos\frac{x}{7}\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}+\int\limits_{-7\pi/2}^{7\pi/2}7\cos\frac{x}{7}dx\right)=\left(\frac{1}{2}x^2\sin\frac{x}{7}+7x\cos\frac{x}{7}-49\sin\frac{x}{7}\right)\Bigg|_{-7\pi/2}^{7\pi/2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}+7\cdot\frac{7\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-49\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7\pi}{2}\right)^2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+7\cdot\left(-\frac{7\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-49\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{49\pi^2}{8}+0-49+\frac{49\pi^2}{8}-49=\frac{49\pi^2}{4}-98=\frac{49\pi^2-392}{4}\approx 22{,}903.$$

Контрольная работа № 2

Математическая статистика

Задание 2.1. Для выборки объема $N = 100$, представленной вариационным рядом

x_i	-1	0	1	2	3	4	5
n_i	3	8	13	19	35	17	5

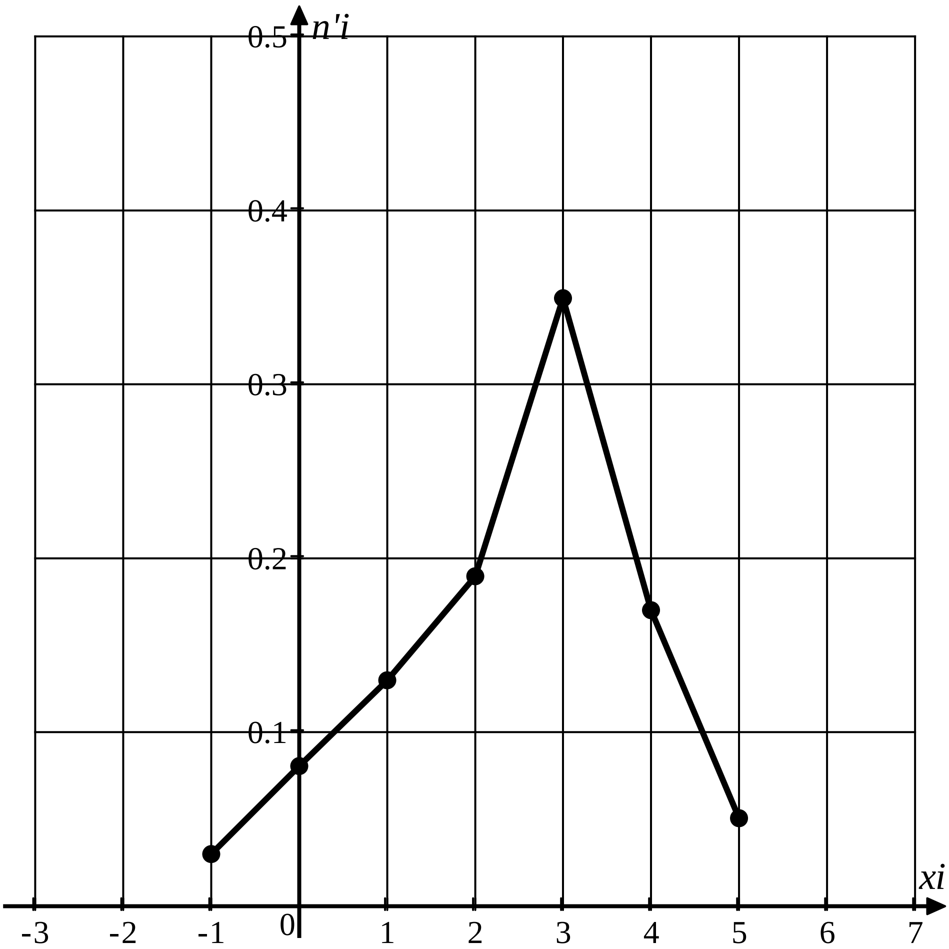
построить полигон относительных частот и гистограмму накопленных частот. Найти выборочное среднее $\overline{X}_{\hat{a}}$ и выборочное среднее квадратичное уклонение $\overline{\sigma}_{\hat{a}}$. Определить доверительный интервал с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}95$ для оценки математического ожидания генеральной совокупности в предположении, что среднее квадратичное уклонение генеральной совокупности σ равно исправленному выборочному среднему s. Проверить гипотезу о нормальности закона распределения генеральной совокупности, используя критерий Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение.

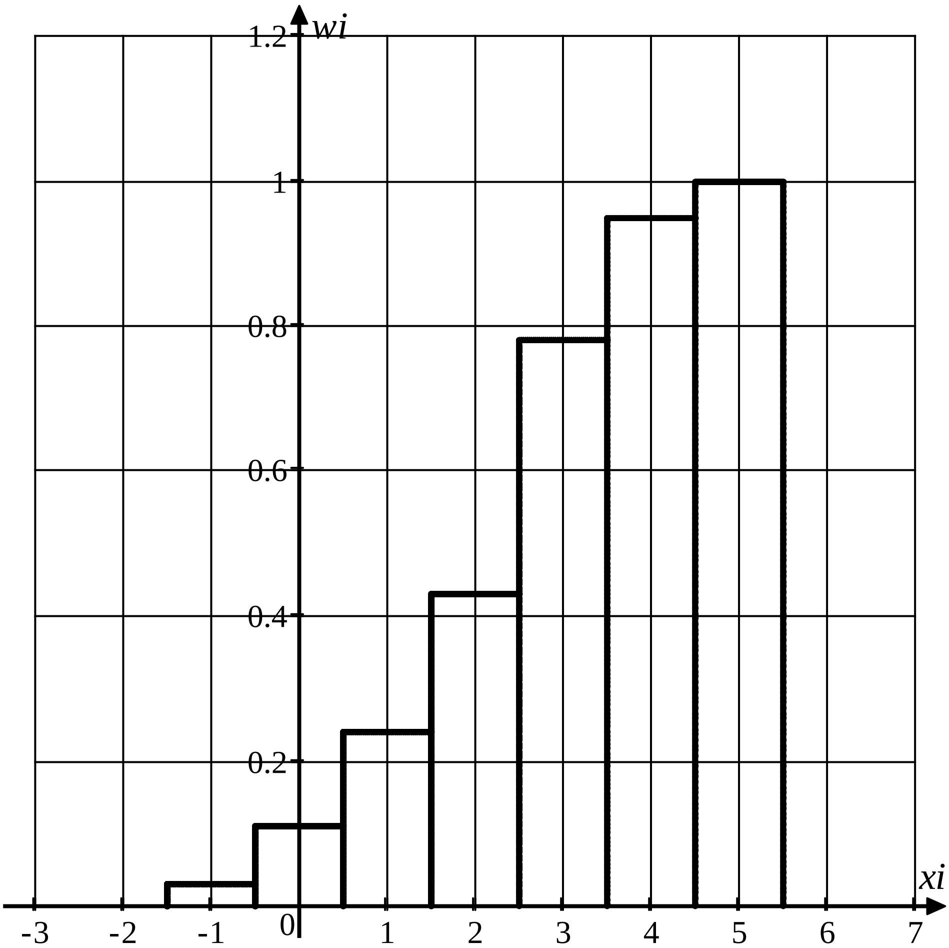
Выпишем относительные и накопленные частоты по данной выборке.

x_i	-1	0	1	2	3	4	5
n_i	3	8	13	19	35	17	5
n_i'	0,03	0,08	0,13	0,19	0,35	0,17	0,05
w_i	0,03	0,11	0,24	0,43	0,78	0,95	1

Построим полигон относительных частот n_i'.



Построим гистограмму накопленных частот.



Найдем выборочное среднее:

$$\overline{x}_{в} = \frac{1}{100} \cdot \left(-1 \cdot 3 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 5\right) = \frac{246}{100} = 2,46.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$\overline{D}_{в} = \frac{1}{100} \cdot \left((-1)^2 \cdot 3 + 0^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 13 + 2^2 \cdot 19 + 3^2 \cdot 35 + 4^2 \cdot 17 + 5^2 \cdot 5\right) - 2,46^2 =$$

$$= \frac{804}{100} - 2,46^2 = 1,9884.$$

Выборочное среднее квадратичное равно

$$\overline{\sigma}_{в} = \sqrt{\overline{D}_{в}} = \sqrt{1,9884} = 1,4101.$$

Исправленная выборочная дисперсия равна

$$s_{в}^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \overline{D}_{в} = \frac{100}{99} \cdot 1,9884 = 2,0085,$$

Откуда

$$s_{\text{â}} = \sqrt{2{,}0085} = 1{,}4172\,.$$

Найдем доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью в предположении, что среднее квадратичное уклонение генеральной совокупности равно $s_{\text{â}} = 1{,}4172$.

Из таблицы значений функции Лапласа находим, что решение уравнения $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2} = 0{,}475$ равно $t_\gamma = 1{,}96$, откуда доверительный интервал равен

$$\left(\bar{x}_{\text{â}} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}};\, \bar{x}_{\text{â}} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \left(2{,}46 - 1{,}96 \cdot \frac{1{,}4172}{\sqrt{100}};\, 2{,}46 - 1{,}96 \cdot \frac{1{,}4172}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (2{,}1822;\, 2{,}7378).$$

Проверим гипотезу о нормальности закона распределения генеральной совокупности с использованием критерий Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Найдем теоретические частоты $n_i^{\text{ò}} = \dfrac{Nh}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}_{\text{â}}} \cdot e^{-\frac{(u_i - \bar{x}_{\text{â}})^2}{2\bar{\sigma}_{\text{â}}^2}}$ для данного вариационного ряда. Результаты подсчета запишем в виде таблицы. Коэффициент $\dfrac{Nh}{\sigma_{\text{â}}}$ равен $\dfrac{100 \cdot 1}{1{,}4101} = 70{,}9170$. Обозначим $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ плотность стандартного нормального распределения. Функция $\varphi(x)$ затабулирована, и нам нужно лишь определить значения ее аргумента x в точках $u_i' = \dfrac{u_i - \bar{x}_{\text{â}}}{\bar{\sigma}_{\text{â}}} = \dfrac{u_i - 2{,}46}{1{,}4101}$. Далее, $n_i^{\text{ò}} = 70{,}9170 \cdot \varphi(u_i')$.

u_i	– 1	0	1	2	3	4	5
u_i'	– 2,4537	– 1,7446	– 1,0354	– 0,3262	0,3830	1,0921	1,8013
$\varphi(u_i')$	0,0197	0,0871	0,2334	0,3783	0,3707	0,2197	0,0788
$n_i^{\text{ò}}$	1,3940	6,1770	16,5528	26,8258	26,2915	15,5834	5,5859

Теперь мы можем определить $\chi^2_{\text{íàáë}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\left(n_i - n_i^{\text{ò}}\right)^2}{n_i^{\text{ò}}}$.

$$\chi^2_{\text{íàáë}} = \frac{(3-1{,}3940)^2}{1{,}3940} + \frac{(8-6{,}1770)^2}{6{,}1770} + \frac{(13-16{,}5528)^2}{16{,}5528} + \frac{(19-26{,}8258)^2}{26{,}8258} +$$

$$+ \frac{(35-26{,}2915)^2}{26{,}2915} + \frac{(17-15{,}5834)^2}{15{,}5834} + \frac{(5-5{,}5859)^2}{5{,}5859} = 8{,}5085.$$

Определим $\chi^2_{\text{êðèò}}$. Число степеней свободы равно $s = k - 3 = 7 - 3 = 4$. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. По таблице критических точек распределения χ^2 находим $\chi^2_{\text{êðèò}}(4;\, 0{,}05) = 9{,}5$. Поскольку $\chi^2_{\text{íàáë}} < \chi^2_{\text{êðèò}}$ гипотеза о нормальном законе распределения генеральной совокупности принимается.

<u>Задание 2.2.</u> По выборке объема $N = 100$ двумерной генеральной совокупности, представленной таблицей

	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 2$	$x_5 = 3$	$x_6 = 4$	$x_7 = 5$
$y_1 = -2$	1	1	0	0	0	0	0
$y_2 = -1$	2	7	5	11	7	0	0
$y_3 = 0$	0	0	7	5	16	4	0
$y_4 = 1$	0	0	1	3	10	6	4
$y_5 = 2$	0	0	0	0	2	7	1

написать уравнение линейной регрессии для условного математического ожидания $\overline{y}_x$ на x в виде $\dfrac{\overline{y}_x - \overline{y}}{\sigma_y} = \overline{\rho}_{\text{â}} \dfrac{x - \overline{x}_{\text{â}}}{\sigma_x}$, где $\overline{\rho}_{\text{â}} = \dfrac{\frac{1}{N}\sum n_{ij} x_i y_j - \overline{x}_{\text{â}} \overline{y}_{\text{â}}}{\overline{\sigma}_x \overline{\sigma}_y}$.

Сделать схематический чертеж.

Решение.

Выпишем одномерные выборки для величин x, y.

x_i	–1	0	1	2	3	4	5
n_i	3	8	13	19	35	17	5

Найдем выборочное среднее:

$$\bar{x}_{\hat{a}} = \frac{1}{100}\cdot\left(-1\cdot 3 + 0\cdot 8 + 1\cdot 13 + 2\cdot 19 + 3\cdot 35 + 4\cdot 17 + 5\cdot 5\right) = \frac{246}{100} = 2{,}46.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$\bar{D}_{\hat{a}} = \frac{1}{100}\cdot\left((-1)^2\cdot 3 + 0^2\cdot 8 + 1^2\cdot 13 + 2^2\cdot 19 + 3^2\cdot 35 + 4^2\cdot 17 + 5^2\cdot 5\right) - 2{,}46^2 =$$

$$= \frac{804}{100} - 2{,}46^2 = 1{,}9884.$$

Выборочное среднее квадратичное равно

$$\bar{\sigma}_{\hat{a}} = \sqrt{\bar{D}_{\hat{a}}} = \sqrt{1{,}9884} = 1{,}4101.$$

Аналогично,

y_i	-2	-1	0	1	2
n_i	2	32	32	24	10

Найдем выборочное среднее:

$$\bar{x}_{\hat{a}} = \frac{1}{100}\cdot\left(-2\cdot 2 - 1\cdot 32 + 0\cdot 32 + 1\cdot 24 + 2\cdot 10\right) = \frac{8}{100} = 0{,}08.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$\bar{D}_{\hat{a}} = \frac{1}{100}\cdot\left((-2)^2\cdot 2 + (-1)^2\cdot 32 + 0^2\cdot 32 + 1^2\cdot 24 + 2^2\cdot 10\right) - 0{,}08^2 =$$

$$= \frac{104}{100} - 0{,}08^2 = 1{,}0336.$$

Выборочное среднее квадратичное равно

$$\bar{\sigma}_{\hat{a}} = \sqrt{\bar{D}_{\hat{a}}} = \sqrt{1{,}0336} = 1{,}0167.$$

Для определения уравнения регрессии осталось вычислить выборочный коэффициент корреляции $\bar{\rho}_{\hat{a}}$. Найдем сумму

$$\sum_{i,\,j} n_{ij}x_i y_j = (-1)\cdot(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 0\cdot(-2)\cdot 1 + 0\cdot(-1)\cdot 7 + 1\cdot(-1)\cdot 5 +$$

$$+1\cdot 0\cdot 7 + 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 11 + 2\cdot 0\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot(-1)\cdot 7 + 3\cdot 0\cdot 16 + 3\cdot 1\cdot 10 +$$

$$+3\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 0\cdot 4 + 4\cdot 1\cdot 6 + 4\cdot 2\cdot 7 + 5\cdot 1\cdot 4 + 5\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 2 + 2 - 5 + 1 - 22 + 6 - 21 + 30 + 12 + 24 + 56 + 20 + 10 = 115.$$

Подставляем найденное значение суммы смешанных произведений в формулу выборочного коэффициента корреляции

$$\overline{\rho}_{\text{в}} = \frac{\frac{1}{N}\sum n_{ij}x_i y_j - \overline{x}_{\text{в}}\overline{y}_{\text{в}}}{\overline{\sigma}_x\overline{\sigma}_y} = \frac{\frac{1}{100}\cdot 115 - 2{,}46\cdot 0{,}08}{1{,}4101\cdot 1{,}0167} = 0{,}6649$$

Уравнение линейной регрессии $\overline{y}_x$ на x имеет вид

$$\frac{\overline{y}_x - 0{,}08}{1{,}0167} = 0{,}6649\cdot\frac{x-2{,}46}{1{,}4101} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{y}_x = 0{,}4794x - 1{,}0813.$$

Сделаем схематический чертеж. Для этого выпишем условные выборочные средние $\overline{y}_x$ при $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\overline{y}_{-1} = \frac{1}{3}\cdot(-2\cdot 1 - 1\cdot 2) = -\frac{4}{3} = -1{,}3333;$$

$$\overline{y}_0 = \frac{1}{8}\cdot(-2\cdot 1 - 1\cdot 7) = -\frac{9}{8} = -1{,}125;$$

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{13}\cdot(-1\cdot 5 + 0\cdot 7 + 1\cdot 1) = -\frac{4}{13} = -0{,}3077;$$

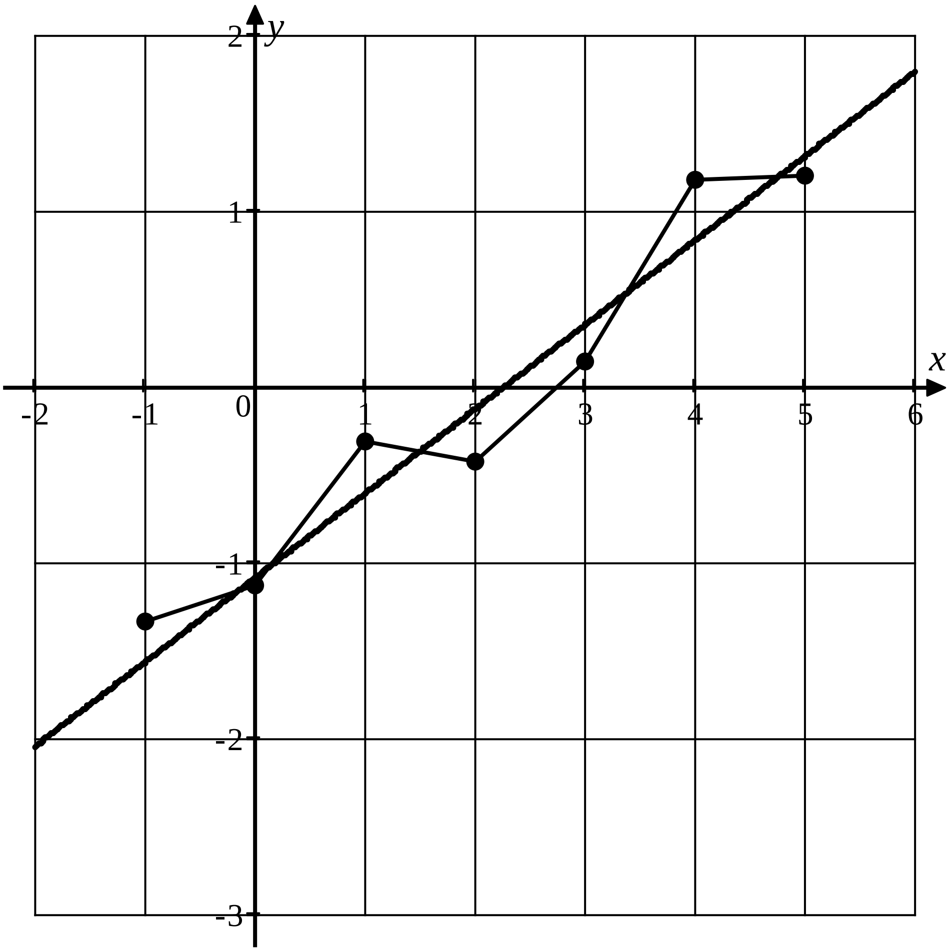
$$\overline{y}_2 = \frac{1}{19}\cdot(-1\cdot 11 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3) = -\frac{8}{19} = -0{,}4211;$$

$$\overline{y}_3 = \frac{1}{35}\cdot(-1\cdot 7 + 0\cdot 16 + 1\cdot 10 + 2\cdot 2) = \frac{5}{35} = 0{,}1429;$$

$$\overline{y}_4 = \frac{1}{17}\cdot(0\cdot 4 + 1\cdot 6 + 2\cdot 7) = \frac{20}{17} = 1{,}1765;$$

$$\overline{y}_5 = \frac{1}{5}\cdot(1\cdot 4 + 2\cdot 1) = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Теперь построим на одной координатной плоскости график функции $\overline{y}_x = 0{,}4794x - 1{,}0813$ и точки $(x_i;\overline{y}_{xi})$.


y
x
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6