Теория игр

Решение контрольной работы

Задача 1. Решить задачу графическим методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	15	20	12,5
A_2	18	14	11	16

Решение. Очевидно, матрица не имеет седловой точки, поэтому будем искать решение в смешанных стратегиях. Решим задачу графическим методом. Обозначим смешанные стратегии игроков, соответственно, $X=(x_1,x_2)$ и $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Цена игры обозначается традиционно v.

Вычислим средний выигрыш первого игрока, при условии, что он применяет свою смешанную стратегию, а второй – свою чистую j-ю стратегию:

$M_j(x_1)=(a_{1j}-a_{2j})x_1+a_{2j}$, $j=1,2,3,4$.

Получаем:

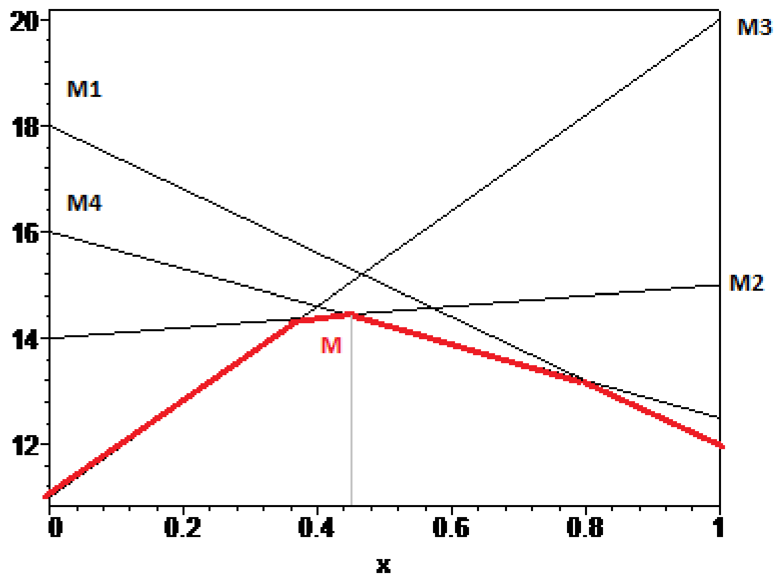
$M_1(x_1)=(a_{11}-a_{21})x_1+a_{21}=-6x_1+18$,

$M_2(x_1)=(a_{12}-a_{22})x_1+a_{22}=x_1+14$,

$M_3(x_1)=(a_{13}-a_{23})x_1+a_{23}=9x_1+11$,

$M_4(x_1) = (a_{14} - a_{24})x_1 + a_{24} = -3{,}5x_1 + 16$.

Строим соответствующие прямые в прямоугольной системе координат:



Цель второго игрока – минимизировать выигрыш первого за счет выбора своих стратегий, поэтому берем самые нижние отрезки. Цель первого игрока – максимизировать выигрыш за счет выбора x_1, поэтому берем самую высокую точку M (см. чертеж).

Чтобы точно определить точку, найдем точку пересечения прямых M_4 и M_2:

$$x_1 + 14 = -3{,}5x_1 + 16,$$
$$4{,}5x_1 = 2,$$
$$x_1 = 4/9.$$

Смешанная стратегия первого игрока $X=(4/9,5/9)$.

Цена игры $v=x_1+14=14\frac{4}{9}=\frac{130}{9}\approx 14,444.$

Осталось найти смешанную стратегию второго игрока. Очевидно, $y_1=y_3=0$ (эти стратегии не участвуют в образовании цены игры, см. чертеж), $y_4+y_2=1$. Дополняем это уравнение еще двумя:

$y_4+y_2=1$

$15y_2+12,5y_4=130/9$,

$14y_2+16y_4=130/9$,

откуда получаем $y_2=7/9,\ y_4=2/9$, смешанная стратегия второго игрока $Y=(0,7/9,0,2/9)$.

Решение игры найдено. Смешанные стратегии $X=(4/9,5/9)$, $Y=(0,7/9,0,2/9)$, цена игры $v=130/9$.

Задача 2. Определите оптимальные стратегии по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (λ задано).

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	23	22	24	21
A_2	22	23	23	24
A_3	21	24	21	22

$\lambda = 0,75$

Решение.

1) Критерий Вальда. В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок систем по различным состояниям обстановки $K(A_i) = \min_j k_{ij}$, $i = 1,...,m$.

Оптимальной считается система из строки с максимальным значением эффективности:

$K_{опт} = \max\{K(B_i), i = 1,...,m\}$

Вычисляем: $K(B_1) = 21$, $K(B_2) = 22$, $K(B_3) = 21$.

Тогда $K_{опт} = \max\{21; 22; 21\} = 22$

Лучшая стратегия по этому критерию Π_2.

2) Критерий Сэвиджа. Минимизирует потери эффективности при наихудших условиях. Для оценки систем на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок эффективности в столбце: $\Delta k_{ij} = \max_i k_{ij} - k_{ij}$.

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:

$K(A_i) = \max_j \Delta k_{ij}$, $i = 1,...,m$., $K_{опт} = \min\{K(A_i), i = 1,...,m\}$

Матрице эффективности будет соответствовать матрица потерь:

0	2	0	3
1	1	1	0
2	0	3	2

Вычисляем теперь:

$K(A_1)=3$, $K(A_2)=1$, $K(A_3)=3$.

Минимальное значение из них: $K_{опт}=\min\{3;1;3\}=1$.

Лучшая стратегия по этому критерию Π_2 .

3) Используем критерий пессимизма-оптимизма Гурвица для $\lambda=0,75$:

$$G=\max_i\left[\lambda\cdot\min_j B_{ij}+(1-\lambda)\cdot\max_j B_{ij}\right]$$

Вычисляем необходимые величины:

$i=1$. $G_1=0,75\cdot 21+0,25\cdot 24=21,75$

$i=2$. $G_2=0,75\cdot 22+0,25\cdot 24=22,5$

$i=3$. $G_3=0,75\cdot 21+0,25\cdot 24=21,75$

Теперь выбираем наибольшее из полученных значений, это $G = \max\{21,75; 22,5; 21,75\} = 22,5$, поэтому оптимальная стратегия - стратегия Π_2

.

Ответ. Выбираем стратегию Π_2.