МГАПИ

Типовой расчет

Пределы функций

Найти пределы функций:

Задача 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x+1}}{(x+1)(x+5)}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^4+x+1}}{(x+1)(x+5)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Старшая степень числителя $x^{4/2}=x^2$, старшая степень знаменателя $x\cdot x=x^2$. Делим на x^2 числитель и знаменатель:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+1/x^3+1/x^4}}{(1+1/x)(1+5/x)}=\frac{\sqrt{2+0+0}}{(1+0)(1+0)}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}.$$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x+1}-2x\right)$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x+1}-2x\right)=(\infty-\infty)=$$

Получили неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и поделим на выражение, сопряженное данному:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+6x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+6x+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+6x+1}+2x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2+6x+1-4x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^2+6x+1}+2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{\left(\sqrt{4x^2+6x+1}+2x\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Поделим на старшую степень числителя и знаменателя – на x:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+1/x}{\left(\sqrt{4+6/x+1/x^2}+2\right)}=\frac{6}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{2}.$$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3+3x-7}{x^2+3x-4}$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x-7}{x^2+3x-4}=\left(\frac{4+3-7}{1+3-4}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители, выделив в каждом множитель $(x-1)$.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+3x-7 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^3-4x^2} & 4x^2+4x+7 \\ 4x^2+3x-7 & \\ \underline{4x^2-4x} & \\ 7x-7 & \\ \underline{7x-7} & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$$

Получаем:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^2+4x+7)(x-1)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+4x+7}{x+4}=\frac{4+4+7}{1+4}=\frac{15}{5}=3.$$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\left(\frac{1-1}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим и поделим на выражение, сопряженное числителю.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1+2x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x}\right)}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\sin 2\pi x}$

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\sin 2\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сначала сделаем замену переменной: $y=x-1$.

Получим

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\sin 2\pi x}=\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(y+1\right)\right)}{\sin\left(2\pi\left(y+1\right)\right)}=\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{tg}\left(\pi y\right)}{\sin\left(2\pi y\right)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\pi y\right)}{\sin\left(2\pi y\right)\cos\left(\pi y\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Применяем первый замечательный предел: $\frac{\sin t}{t}\to1,\ t\to0$.

$$=\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\pi y\right)}{\pi y}\frac{2\pi y}{\sin\left(2\pi y\right)}\frac{\pi y}{2\pi y\cos\left(\pi y\right)}=\lim_{y\to0}\frac{1}{2\cos\left(\pi y\right)}=\frac{1}{2}.$$

Задача 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+5}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+1+3}{2x-1}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{x+5}=\left(1^{\infty}\right)=$$

Получили неопределенность вида 1^{∞}. Приводим к второму замечательному пределу $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\to e,\ t\to\infty$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{4}{2x-1}(x+5)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x+20}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4+20/x}{2-1/x}}=e^{2}.$$

Задача 7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}3x}{e^{2x^2}-1}$

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}3x}{e^{2x^2}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Используем известные эквивалентности:

$\sin t\sim t,\ \operatorname{tg}t\sim t,\ e^{t}\sim1+t$ при $t\to0$.

Получаем:

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot3x}{1+2x^2-1}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{2x^2}=3.$$

Задача 8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

Решение. Делаем замену переменной, $y=x^{1/6}$, $x=y^6$, $y\to 1$. Получаем:

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^2-1}{y^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем числитель и знаменатель на множители.

$$\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^2-1}{y^3-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{(y+1)}{\left(y^2+y+1\right)}=\frac{2}{3}.$$

Задача 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$

Решение.

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=5-3=2.$$

Применили первый замечательный предел: $\frac{\sin t}{t}\to 1,\ t\to 0$.

Задача 10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

Решение.

$$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=$$

Используем второй замечательный предел для неопределенности 1^{∞}: $(1+x)^{1/x}\to e, x\to 0$.

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2x}{x}}=e^2.$$