Экономико-математические методы
Расчетно-графическая работа

Задание 1. Производственные функции

Производственная функция коммерческого предприятия имеет вид $f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$, где f - товарооборот, тыс. руб.; x_1 - производственная площадь, м^2; x_2 - численность работников, сотни человек. Рассмотрите изокванту уровня $y_0 = \sqrt{100 + \delta}$ и найдите точку C_1 с координатами $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$, где $\overline{x_1} = \dfrac{\delta - 100}{100}$, и точку C_2 с координатами $(\overline{x_1}', \overline{x_2}')$, где $\overline{x_2}' = \dfrac{\delta - 300}{100}$. Сделайте вывод о возможности замены ресурсов $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ и $(\overline{x_1}', \overline{x_2}')$. Полученные результаты изобразите графически.

Решение. Рассмотрим изокванту уровня $y_0 = \sqrt{100 + \delta} = \sqrt{100 + 598} \approx 26,42$, то есть $f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = y_0 = 26,325$, откуда

$$10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 26,42,$$

$$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 2,642,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6,98,$$

$$x_2 = \frac{6,98}{x_1}.$$

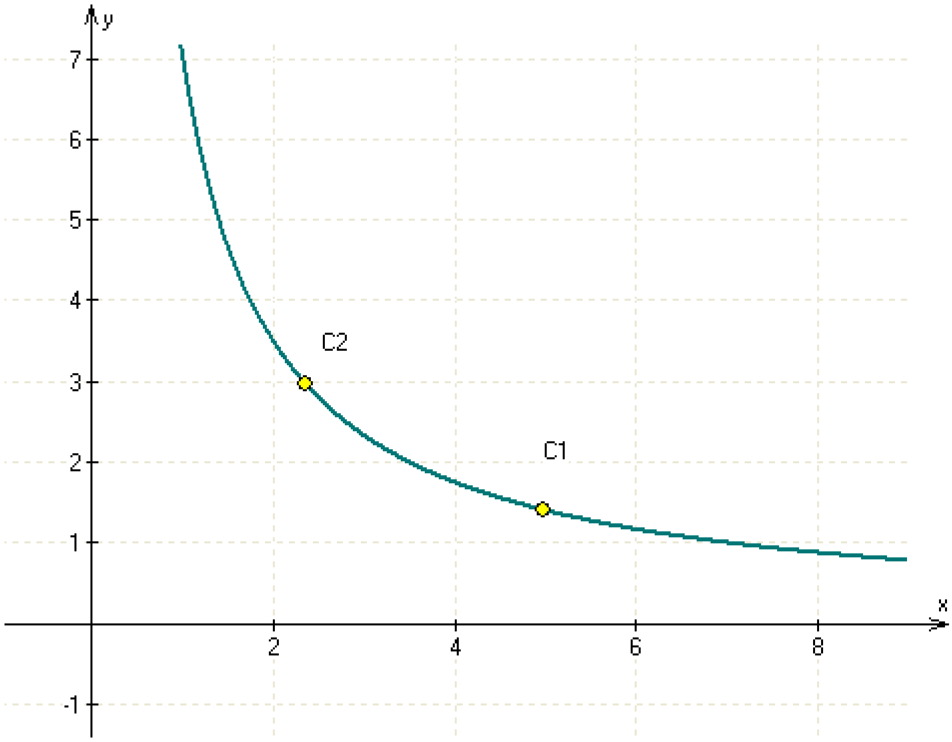
Таким образом, уравнение изокванты имеет вид $x_2 = \dfrac{6,98}{x_1}$, это гипербола, она описывает обратно пропорциональную зависимость.

Найдем точку C_1 с координатами $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$, где $\overline{x_1} = \dfrac{\delta - 100}{100} = \dfrac{598 - 100}{100} = 4,98$, поэтому $\overline{x_2} = \dfrac{6,98}{\overline{x_1}} = \dfrac{6,98}{4,98} \approx 1,402$. Получили точку $C_1(4,98;\ 1,402)$.

Найдем точку C_2 с координатами $(\overline{x_1}', \overline{x_2}')$, где $\overline{x_2}' = \dfrac{\delta - 300}{100} = \dfrac{598 - 300}{100} = 2,98$, поэтому . $\overline{x_1}' = \dfrac{6,98}{\overline{x_2}'} = \dfrac{6,98}{2,98} \approx 2,342$. Получили точку $C_2(2,342;\ 2,98)$.

Поскольку точки $C_1(4,98;\ 1,402)$ и $C_2(2,342;\ 2,98)$ расположены на одной изокванте, значение производственной функции (товарооборот) в этих точках одинаково, поэтому данные наборы ресурсов взаимозаменяемы. Определить, какой набор более выгоден можно в условиях реальной экономической ситуации.

Изобразим данные графически:



На графике изображена изокванта функции товарооборота, соответствующая значению товарооборота 26,42 тыс. руб. Товарооборот зависит от двух параметров (переменных): x_1 - производственная площадь, $м^2$; x_2 - численность работников, сотни человек, которые отложены по оси абсцисс и ординат соответственно. Существует бесконечное число комбинаций площадь и численности работников, при которых товарооборот сохраняется (см. кривую), причем существует гиперболическая зависимость: чем больше площадь, тем меньше требуется работников и наоборот, чем больше работников, тем меньше требуется площадь производственных помещений.

На графике (на изокванте) отмечены две точки, соответствующие рассмотренным в задаче комбинациям: $C_1(4,98;\, 1,402)$ и $C_2(2,342;\, 2,98)$.

Задание 2. Классификация товаров

Производите классификацию товаров по следующей таблице эластичностей:

Товар	I	II	III
I	$\frac{\delta-610}{100}$	$\frac{550,5-\delta}{100}$	$\frac{570,5-\delta}{100}$
II	$\frac{550,5-\delta}{100}$	$\frac{\delta-640}{100}$	$\frac{520,5-\delta}{100}$

III	$\frac{570,5-\delta}{100}$	$\frac{520,5-\delta}{100}$	$\frac{\delta-680}{100}$

Решение. Запишем таблицу для $\delta = 598$.

Товар	I	II	III
I	-0,12	-0,475	-0,275
II	-0,475	-0,42	-0,775
III	-0,275	-0,775	-0,82

Все приведенные товары I, II и III являются взаимодополняемыми (так как эластичность отрицательна). Чем больше величина отрицательного коэффициента, тем больше взаимодополняемость двух данных товаров (в данном случае это товары II и III).

Задание 3. Межотраслевой баланс

За отчетный период имел место следующий баланс продукции:
$x_1 = x_{11} + x_{12} + y_1$,
$x_2 = x_{21} + x_{22} + y_2$,
$x_{11} = 800 - \delta$,
$x_{21} = 750 - \delta$,
$x_{12} = 700 - \delta$,
$x_{22} = 850 - \delta$,
$y_1 = 300$,
$y_2 = 220$.

Вычислите коэффициенты прямых затрат;
Вычислите плановый объем валовой продукции отраслей, если план выпуска конечной продукции $y_1^{\Pi} = 350$, $y_2^{\Pi} = 250$ при условии неизменности технологии производства.

Решение. Запишем данные для $\delta = 598$.
$x_{11} = 800 - \delta = 800 - 598 = 202$,
$x_{21} = 750 - \delta = 750 - 598 = 152$,
$x_{12} = 700 - \delta = 700 - 598 = 102$,
$x_{22} = 850 - \delta = 850 - 598 = 252$.

Вычислим x_1 и x_2:
$x_1 = x_{11} + x_{12} + y_1 = 202 + 102 + 300 = 604$,
$x_2 = x_{21} + x_{22} + y_2 = 152 + 252 + 220 = 624$.
Коэффициент прямых затрат определяется как объём ресурса i, необходимый для производства единицы продукта j, т.е.

$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, $i, j = 1, 2.$

Получаем

$a_{11} = \dfrac{x_{11}}{x_1} = \dfrac{202}{604} \approx 0,334$,

$a_{12} = \dfrac{x_{12}}{x_2} = \dfrac{102}{624} \approx 0,169$,

$a_{21} = \dfrac{x_{21}}{x_1} = \dfrac{152}{604} \approx 0,244$,

$a_{22} = \dfrac{x_{22}}{x_2} = \dfrac{252}{624} \approx 0,404$.

Матрица коэффициентов прямых затрат (структурная матрица) $A = \begin{pmatrix} 0,334 & 0,169 \\ 0,244 & 0,404 \end{pmatrix}$.

б) Вычислим плановый объем валовой продукции отраслей, если план выпуска конечной продукции $y_1^{П} = 350$, $y_2^{П} = 250$ при условии неизменности технологии производства.

Используем формулу $X = (E - A)^{-1} Y$, где матрица A задана выше, $X = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1^{П} \\ y_2^{П} \end{pmatrix}$.

Обратная матрица к матрице $E - A = \begin{pmatrix} 0,666 & -0,169 \\ -0,244 & 0,596 \end{pmatrix}$ имеет вид

$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,676 & 0,475 \\ 0,685 & 1,871 \end{pmatrix}$, тогда

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,676 & 0,475 \\ 0,685 & 1,871 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 250 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 705,41 \\ 707,59 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плановый объем валовой продукции отраслей увеличится до 705,41 и 707,59.

Задание 4. Использование метода теории игр в торговле

Выберите стратегии с позиций крайнего пессимизма, крайнего оптимизма и оптимизма-пессимизма для следующей платежной таблицы. Укажите соответствующие выигрыши.

	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	$\delta - 490$	$\delta - 480$	$620 - \delta$
A_2	$610 - \delta$	$620 - \delta$	$630 - \delta$
A_3	$\lvert 550 - \delta \rvert + 10$	$\lvert 560 - \delta \rvert + 10$	$640 - \delta$

Решение. Запишем матрицу выигрышей (платежную матрицу) для значения $\delta = 598$.

	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	108	118	22
A_2	12	22	32
A_3	58	48	42

1) Крайний пессимизм (критерий Вальда). Стратегию выбираем из условия максимума самого малого выигрыша:
Стратегия A_1, выигрыш 22,
Стратегия A_2, выигрыш 12,
Стратегия A_3, выигрыш 42.
Выбираем самый большой выигрыш 42, ему соответствует стратегия A_3.

2) Крайний оптимизм. Нужно выбрать стратегию, приносящую максимальный выигрыш (вне зависимости от состояния природы), то есть A_1, выигрыш равен 118.

3) Оптимизм-пессимизм (критерий Гурвица). Примем $\alpha = 0,5$.
Стратегия A_1, выигрыш $0,5\cdot 22 + 0,5\cdot 118 = 70$,
Стратегия A_2, выигрыш $0,5\cdot 12 + 0,5\cdot 32 = 22$,
Стратегия A_3, выигрыш $0,5\cdot 42 + 0,5\cdot 58 = 50$.
Выбираем стратегию с наибольшим выигрышем 70, это стратегия A_1.

Таким образом, два критерия из трех рекомендуют выбор первой стратегии. Тогда даже в самом худшем случае будет получен выигрыш 22, в самом лучшем случае – 108, по критерию Гурвица – 70.

Задание 5. Системы массового обслуживания

В магазине самообслуживания работают две кассы с интенсивностью $\mu = \dfrac{\delta + 300}{100}$ (треб./мин.) каждая. Входящий поток требований имеет интенсивность $\lambda = \dfrac{\delta + 400}{100}$ (треб./мин.). Рассчитайте долю времени простоя касс и среднюю длину очереди. Если интенсивность входящего потока станет равной $\lambda = \dfrac{700 - \delta}{100}$ (треб./мин.), то будет ли выполнено условие стационарности? Если будет, то во сколько раз увеличится средняя длина очереди.

Решение. Имеем двухканальную $(k = 2)$ систему массового обслуживания с неограниченной очередью и параметрами: $\lambda = \dfrac{\delta + 400}{100} = \dfrac{598 + 400}{100} = 9,98$ (интенсивность потока заявок), $\mu = \frac{\delta + 300}{100} = \frac{598+300}{100} = 8,98$ (интенсивность потока обслуживания). Коэффициент загрузки СМО $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9,98}{8,98} \approx 1,111$. Показатель нагрузки на один канал $\chi = \frac{\rho}{k} = \frac{1,111}{2} = 0,556 < 1$, поэтому предельный (стационарный) режим существует.

Обозначим $p_i \ (0 \le i \le k)$ предельную вероятность того, что в системе занято i каналов, а через p_{k+r} - предельную вероятность того, что в системе заняты все k каналов и r заявок стоят в очереди. Найдем предельное распределение вероятностей:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!}\frac{1}{1-\chi}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{1,111}{1!} + \frac{1,111^2}{2!} + \frac{1,111^3}{2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{1-0,556}\right]^{-1} \approx 0,286.$$

$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 1,111 \cdot 0,286 \approx 0,317$, $p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = \frac{(1,111)^2}{2} \cdot 0,286 \approx 0,176$,

$p_{k+r} = \frac{\rho^{k+r}}{k^r k!} p_0 \ (r \ge 1)$

Доля времени простоя касс равна вероятности того, что ни один канал не занят, то есть $p_0 = 0,286$ (28,6% всего времени кассы простаивают).

Средняя длина очереди $\bar{r} = \frac{\rho^{k+1} p_0}{k \cdot k!(1-\chi)^2} = \frac{1,111^3 \cdot 0,286}{2\cdot 2!\cdot(1-0,556)^2} \approx 0,496.$

Теперь проверим выполнения условия стационарности при $\lambda = \frac{700-\delta}{100} = \frac{700-598}{100} = 1,02$, $\mu = 8,98$. Коэффициент загрузки СМО $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1,02}{8,98} \approx 0,114$. Показатель нагрузки на один канал $\chi = \frac{\rho}{k} = \frac{0,114}{2} \approx 0,057 < 1$, поэтому предельный (стационарный) режим существует. Найдем

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!}\frac{1}{1-\chi}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{0,114}{1!} + \frac{0,114^2}{2!} + \frac{0,114^3}{2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{1-0,057}\right]^{-1} \approx 0,892.$$

Средняя длина очереди $\bar{r} = \frac{\rho^{k+1} p_0}{k \cdot k!(1-\chi)^2} = \frac{0,114^3 \cdot 0,892}{2\cdot 2!\cdot(1-0,057)^2} \approx 0,0004.$

Средняя длина очереди уменьшилась примерно в 1340 раз, так как интенсивность потока заявок (покупателей) сильно снизилась с $\lambda = 9,98$ до $\lambda = 1,02$.

Задание 6. Оптимальное управление запасами

Сделайте вывод о целесообразности аренды дополнительных складских емкостей или о необходимости сокращения объема заказываемой партии товара с учетом имеющихся складских емкостей при сравнении фактической $\alpha\left(\frac{руб.}{кг\cdot сут.}\right)$ и предельной $\lambda\left(\frac{руб.}{кг\cdot сут.}\right)$ арендной платы за хранение единицы товара в единицу времени.

$\alpha=\frac{700-\delta}{4000}$, $\lambda=\frac{\delta-400}{4000}$.

Решение. Для $\delta=598$ получаем:

$\alpha=\frac{700-\delta}{4000}=\frac{700-598}{4000}=0,026$,

$\lambda=\frac{\delta-400}{4000}=\frac{598-400}{4000}=0,050$.

Приведенные расчеты показывают, что фактический размер арендной платы превышает размер предельной арендной платы, значит, необходимо сократить объем заказываемой партии товара.

Задание 7. Выборочный метод

Определите соотношения между доверительными интервалами:

При фиксированных значениях среднеквадратического отклонения σ, надежности P и различных значениях объема выборки:

$n_1=610-\delta$, $n_2=\delta-490$.

При фиксированных значениях среднеквадратического отклонения σ, объема выборки n и различных значениях надежности:

$p_1=\frac{800-\delta}{400}$, $p_2=\frac{\delta-300}{400}$.

При фиксированных значениях надежности P, объема выборки n и различных значениях среднеквадратического отклонения:

$\sigma_1=\frac{700-\delta}{100}$, $\sigma_2=\frac{\delta-400}{100}$.

Решение. Доверительный интервал (для математического ожидания) находится по формуле: $|a-\bar{x}|<t_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. То есть он тем больше, чем больше величина $\Delta=t_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Часть 1. При фиксированных значениях среднеквадратического отклонения σ, надежности P и различных значениях объема выборки:

$n_1=610-\delta=610-598=12$, $n_2=\delta-490=598-490=108$.

Получаем: $\Delta_1=t_p\frac{\sigma}{\sqrt{12}}>\Delta_2=t_p\frac{\sigma}{\sqrt{108}}$, то есть для $n_1=12$ доверительный интервал больше, чем для $n_2=108$.

Часть 2. При фиксированных значениях среднеквадратического отклонения σ, объема выборки n и различных значениях надежности:
$p_1=\frac{800-\delta}{400}=\frac{800-598}{400}=0,51$, $p_2=\frac{\delta-300}{400}=\frac{598-300}{400}=0,75$.
$t(p_1)=0,68$, $t(p_2)=1,14$
Получаем: $\Delta_1=0,68\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\Delta_2=1,14\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. То есть, для $p_1=0,51$ доверительный интервал меньше, чем для $p_2=0,75$.

Часть 3. При фиксированных значениях надежности P, объема выборки n и различных значениях среднеквадратического отклонения:
$\sigma_1=\frac{700-\delta}{100}=\frac{700-598}{100}=1,02$, $\sigma_2=\frac{\delta-400}{100}=\frac{598-400}{100}=1,98$.
Получаем: $\Delta_1=t_p\frac{1,02}{\sqrt{n}}<\Delta_2=t_p\frac{1,98}{\sqrt{n}}$. То есть, для $\sigma_1=1,02$ доверительный интервал меньше, чем для $\sigma_2=1,98$.

Задание 8. Корреляционные методы

Оцените тесноту связи и направление связи между признаками x и y, если известны: b - коэффициенты регрессии; σ_x и σ_y - среднеквадратические отклонения признаков x и y.
$b=(-1)^{\delta}\frac{650-\delta}{300}$, $\sigma_x=\frac{700-\delta}{100}$, $\sigma_y=\frac{\delta-400}{100}$.

Решение. Вычислим значения при $\delta=598$:
$b=(-1)^{\delta}\frac{650-\delta}{300}=(-1)^{598}\frac{650-598}{300}=0,173$,
$\sigma_x=\frac{700-\delta}{100}=\frac{700-598}{100}=1,02$,
$\sigma_y=\frac{\delta-400}{100}=\frac{598-400}{100}=1,98$.

Вычислим коэффициенты корреляции и детерминации $r_{xy}=b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=0,173\cdot\frac{1,02}{1,98}\approx 0,089$, $r_{xy}^2\approx 0,008$. Теснота связи (так как коэффициент корреляции $r_{xy}=0,089$) очень слабая. Качество линейной модели относительно низко, так как коэффициент детерминации $r_{xy}^2=0,008$ (уравнением регрессии объясняются лишь 0,8% дисперсии результативного признака). Направление связи прямое (среднее изменение результативного признака при увеличении факторного признака на единицу положительно).

Задание 9. Транспортная задача

На трех базах A_1, A_2 и A_3 имеется однородный груз в количестве a_1 тонн на базе A_1, a_2 тонн на базе A_2, a_3 тонн на базе A_3. Полученный груз требуется перевезти в четыре пункта: b_1 тонн – в пункт B_1, b_2 тонн – в пункт B_2, b_3 тонн – в пункт B_3, b_4 тонн – в пункт B_4 и b_5 тонн – в пункт B_5.
Затраты на перевозку 1 тонны груза между пунктами поставок и потребления заданы матрицей тарифов C (в тыс. руб.).
Спланировать перевозки так, чтобы их стоимость была минимальной.

$$a_1 = 150, a_2 = 150, a_3 = 150;$$
$$b_1 = 160, b_2 = 70, b_3 = 90, b_4 = 80, b_5 = 100;$$
$$C = \begin{pmatrix} 19 & 34 & 21 & 14 & 22 \\ 14 & 8 & 8 & 11 & 21 \\ 19 & 4 & 17 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим исходную таблицу

База	Пункт					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	19 **0**	34 **0**	21 **0**	14 **0**	22 **0**	150
A2	14 **0**	8 **0**	8 **0**	11 **0**	21 **0**	150
A3	19 **0**	4 **0**	17 **0**	9 **0**	20 **0**	150
Потребность	160	70	90	80	100	

Транспортная задача является открытой, так как запас груза 150+150+150=450 меньше потребностей 160+70+90+80+100= 500 на 50 единиц. Приведем задачу к закрытому типу - Введем фиктивного поставщика A4. Тарифы доставки для этого поставщика положим равными нулю.

База	Пункт					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	19 **0**	34 **0**	21 **0**	14 **0**	22 **0**	150
A2	14 **0**	8 **0**	8 **0**	11 **0**	21 **0**	150

A3	19 **0**	4 **0**	17 **0**	9 **0**	20 **0**	150
A4	0 **0**	0 **0**	0 **0**	0 **0**	0 **0**	50
Потребность	160	70	90	80	100	

Найдем опорный план по правилу минимального элемента.

Временно исключаем из рассмотрения клетки фиктивного поставщика.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,2). Помещаем туда меньшее из чисел 150 и 70.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3). Помещаем туда меньшее из чисел 150 и 90.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,4). Помещаем туда меньшее из чисел 80 и 80.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,1). Помещаем туда меньшее из чисел 60 и 160.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,1). Помещаем туда меньшее из чисел 150 и 100.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,5). Помещаем туда меньшее из чисел 50 и 100.
Теперь распределим фиктивный груз между потребителями и фиктивным поставщиком A5: поместим в клетку (4,5) 50 единиц груза.

База	Пункт					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	19 **100**	34	21	14	22 **50**	150
A2	14 **60**	8	8 **90**	11	21	150
A3	19	4 **70**	17	9 **80**	20	150
A4	0	0	0	0	0 **50**	50
Потребность	160	70	90	80	100	

Целевая функция F = 100*19+50*22+60*14+90*8+70*4+80*9+50*0= 5560

Решим задачу методом потенциалов.

Этап 1

Опорный план является вырожденным, так как число занятых клеток меньше, чем m+n-1=8. Сделаем его невырожденным, поместив базисный нуль в клетку (4,2).

База	Пункт					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	19 **100**	34	21	14	22 **50**	150
A2	14 **60**	8	8 **90**	11	21	150
A3	19	4 **70**	17	9 **80**	20	150
A4	0	0 **0**	0	0	0 **50**	50
Потребность	160	70	90	80	100	

Полагая потенциал $U_1=0$, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C_{i,j}$, просматривая все занятые клетки.
Потенциалы:
$U_1=0$
$V_1=C_{1,1}-U_1= 19$
$V_5=C_{1,5}-U_1= 22$
$U_2=C_{2,1}-V_1=-5$
$V_3=C_{2,3}-U_2= 13$
$U_4=C_{4,5}-V_5=-22$
$V_2=C_{4,2}-U_4= 22$
$U_3=C_{3,2}-V_2=-18$
$V_4=C_{3,4}-U_3= 27$

Определяем значения оценок $S_{i,j}=C_{i,j}-(U_i+V_j)$ для всех свободных клеток:
$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 12.$
$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 8.$
$\mathbf{S_{1,4} = C_{1,4} - (U_1 + V_4) = -13.}$
$S_{2,2} = C_{2,2} - (U_2 + V_2) = -9.$
$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2 + V_4) = -11.$
$S_{2,5} = C_{2,5} - (U_2 + V_5) = 4.$
$S_{3,1} = C_{3,1} - (U_3 + V_1) = 18.$
$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 22.$
$S_{3,5} = C_{3,5} - (U_3 + V_5) = 16.$
$S_{4,1} = C_{4,1} - (U_4 + V_1) = 3.$
$S_{4,3} = C_{4,3} - (U_4 + V_3) = 9.$
$S_{4,4} = C_{4,4} - (U_4 + V_4) = -5.$

Выбираем клетку (1,4) с минимальной оценкой -13. Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

База	Пункт					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	19 **100**	34	21	+ 14	- 22 **50**	150
A2	14 **60**	8	8 **90**	11	21	150
A3	19	+ 4 **70**	17	- 9 **80**	20	150
A4	0	- 0 **0**	0	0	+ 0 **50**	50
Потребность	160	70	90	80	100	

Перемещаем по циклу груз величиной в 0 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".
В результате перемещения по циклу получим новый план:

База	Пункт					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	19 **100**	34	21	14 **0**	22 **50**	150
A2	14 **60**	8	8 **90**	11	21	150
A3	19	4 **70**	17	9 **80**	20	150
A4	0	0	0	0	0 **50**	50
Потребность	160	70	90	80	100	

Целевая функция F= 5560.

Этап 2

Проверяем найденный план на оптимальность. Полагая потенциал $U_1=0$, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C_{i,j}$, просматривая все занятые клетки.
Потенциалы:
$U_1=0$
$V_1=C_{1,1}-U_1= 19$
$V_4=C_{1,4}-U_1= 14$
$V_5=C_{1,5}-U_1= 22$
$U_2=C_{2,1}-V_1=-5$
$V_3=C_{2,3}-U_2= 13$
$U_3=C_{3,4}-V_4=-5$
$U_4=C_{4,5}-V_5=-22$
$V_2=C_{3,2}-U_3= 9$

Определяем значения оценок $S_{i,j}=C_{i,j}-(U_i+V_j)$ для всех свободных клеток:

$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 25$.
$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 8$.
$S_{2,2} = C_{2,2} - (U_2 + V_2) = 4$.
$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2 + V_4) = 2$.
$S_{2,5} = C_{2,5} - (U_2 + V_5) = 4$.
$S_{3,1} = C_{3,1} - (U_3 + V_1) = 5$.
$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 9$.
$S_{3,5} = C_{3,5} - (U_3 + V_5) = 3$.
$S_{4,1} = C_{4,1} - (U_4 + V_1) = 3$.
$S_{4,2} = C_{4,2} - (U_4 + V_2) = 13$.
$S_{4,3} = C_{4,3} - (U_4 + V_3) = 9$.
$S_{4,4} = C_{4,4} - (U_4 + V_4) = 8$.

Так как все оценки $S_{i,j}>=0$, то полученный план является оптимальным. Транспортная задача решена.

База	Пункт					Запасы груза
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	19 **100**	34	21	14 **0**	22 **50**	150
А2	14 **60**	8	8 **90**	11	21	150
А3	19	4 **70**	17	9 **80**	20	150
А4	0	0	0	0	0 **50**	50
Потребность	160	70	90	80	100	

Минимальная стоимость перевозок 5560.

Задание 10. Прогнозирование товарооборота

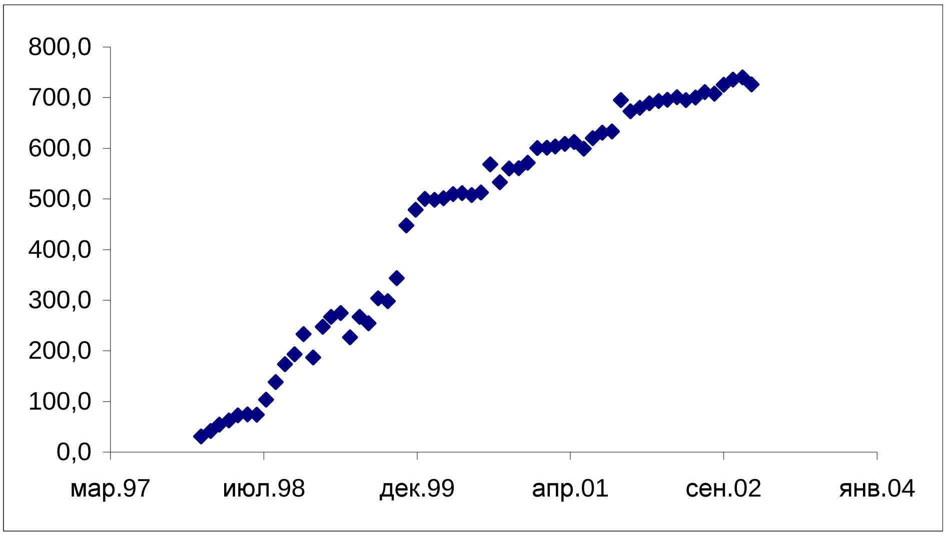
Спрогнозировать объем товарооборота на основе данных таблицы:

- Определить параметры тренда;
- Спрогнозировать объем товарооборота на 2002 г.;
- Оценить погрешность прогноза, сравнив фактические и прогнозные значения за 2002 г.

Месяц	1998	1999	2000	2001	2002
1	31,0	186,8	500,0	600,3	688,6
2	41,6	247,5	498,3	600,8	693,4
3	54,4	267,2	501,3	603,4	695,7
4	62,2	274,8	509,4	608,4	700,8
5	72,9	226,8	511,3	612,7	695,3
6	74,7	267,1	507,9	598,9	700,1
7	74,1	254,4	512,6	620,3	710,9
8	103,6	303,7	568,5	630,5	707,7

9	138,2	298,2	532,9	633,5	725,6
10	173,6	343,5	560,2	695,2	735,6
11	193,4	447,7	560,4	672,8	740,2
12	233,2	478,5	571,2	680,0	725,9

Решение. Определим параметры тренда. Для этого построим диаграмму рассеяния:



Видно, что наблюдается отчетливая линейная тенденция, поэтому уравнение тренда будем искать в виде $\hat{y} = a_0 + a_1 t$. Введем специальную нумерацию временных периодов ($\pm 1, \pm 3, \ldots$), см. в расчетной таблице ниже. Тогда параметры уравнения тренда можно найти по формулам:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{27259,7}{60} = 454,328, \quad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{460340}{71980} = 6,395.$$

Получаем уравнение $\hat{y} = 454,328 + 6,395t$.

Спрогнозируем по этой формуле значения на 2002 год и вычислим относительную и абсолютную погрешность. Результаты расчетов представим в таблице:

	t	y	yt	t^2	$\hat{y}$	$\left\|\hat{y} - y\right\|$	$\frac{\left\|\hat{y} - y\right\|}{y} \cdot 100\%$
янв.98	-59	31,0	-1829	3481			
фев.98	-57	41,6	-2371,2	3249			
мар.98	-55	54,4	-2992	3025			
апр.98	-53	62,2	-3296,6	2809			
май.98	-51	72,9	-3717,9	2601			
июн.98	-49	74,7	-3660,3	2401			
июл.98	-47	74,1	-3482,7	2209			
авг.98	-45	103,6	-4662	2025			
сен.98	-43	138,2	-5942,6	1849			

окт.98	-41	173,6	-7117,6	1681			
ноя.98	-39	193,4	-7542,6	1521			
дек.98	-37	233,2	-8628,4	1369			
янв.99	-35	186,8	-6538	1225			
фев.99	-33	247,5	-8167,5	1089			
мар.99	-31	267,2	-8283,2	961			
апр.99	-29	274,8	-7969,2	841			
май.99	-27	226,8	-6123,6	729			
июн.99	-25	267,1	-6677,5	625			
июл.99	-23	254,4	-5851,2	529			
авг.99	-21	303,7	-6377,7	441			
сен.99	-19	298,2	-5665,8	361			
окт.99	-17	343,5	-5839,5	289			
ноя.99	-15	447,7	-6715,5	225			
дек.99	-13	478,5	-6220,5	169			
янв.00	-11	500,0	-5500	121			
фев.00	-9	498,3	-4484,7	81			
мар.00	-7	501,3	-3509,1	49			
апр.00	-5	509,4	-2547	25			
май.00	-3	511,3	-1533,9	9			
июн.00	-1	507,9	-507,9	1			
июл.00	1	512,6	512,6	1			
авг.00	3	568,5	1705,5	9			
сен.00	5	532,9	2664,5	25			
окт.00	7	560,2	3921,4	49			
ноя.00	9	560,4	5043,6	81			
дек.00	11	571,2	6283,2	121			
янв.01	13	600,3	7803,9	169			
фев.01	15	600,8	9012	225			
мар.01	17	603,4	10257,8	289			
апр.01	19	608,4	11559,6	361			
май.01	21	612,7	12866,7	441			
июн.01	23	598,9	13774,7	529			
июл.01	25	620,3	15507,5	625			
авг.01	27	630,5	17023,5	729			
сен.01	29	633,5	18371,5	841			
окт.01	31	695,2	21551,2	961			
ноя.01	33	672,8	22202,4	1089			
дек.01	35	680,0	23800	1225			
янв.02	37	688,6	25478,2	1369	690,943	2,343	0,34%
фев.02	39	693,4	27042,6	1521	703,733	10,333	1,49%
мар.02	41	695,7	28523,7	1681	716,523	20,823	2,99%
апр.02	43	700,8	30134,4	1849	729,313	28,513	4,07%
май.02	45	695,3	31288,5	2025	742,103	46,803	6,73%
июн.02	47	700,1	32904,7	2209	754,893	54,793	7,83%
июл.02	49	710,9	34834,1	2401	767,683	56,783	7,99%
авг.02	51	707,7	36092,7	2601	780,473	72,773	10,28%
сен.02	53	725,6	38456,8	2809	793,263	67,663	9,33%
окт.02	55	735,6	40458	3025	806,053	70,453	9,58%
ноя.02	57	740,2	42191,4	3249	818,843	78,643	10,62%
дек.02	59	725,9	42828,1	3481	831,633	105,733	14,57%

Сумма	**0**	**27259,7**	**460340**	**71980**		**615,656**	**85,81%**

Оценим погрешность на 2002 год (см. последний столбец таблицы выше). В начале года погрешность достаточно маленькая (0,34%, 1,49%), тогда как к концу года она существенно нарастает (10,62%, 14,57%). Это связано с тем, что фактические значения товарооборота растут медленнее, чем в предыдущие годы, поэтому значения, рассчитанные по тренду, также растут быстрее, наращивая погрешность прогноза. Это же видно на графике, где в первые годы наблюдается сильный рост, в последние годы – замедление роста товарооборота.

Список литературы

1. Айвазян С.А. и др. *Прикладная статистика. Исследование зависимостей*. -М.: Финансы и статистика, 1985.
2. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. *Математические методы в экономике*. -М.: Экономика, 1979.
3. Лопатников Л.И. *Экономико-математический словарь*. -М.: Наука, 1987.
4. Спирин А.А., Фомин Г.П. *Экономико-математические методы и модели в торговле*. -М.: Экономика, 1988.
5. Шаланов Н.В. *Экономико-математические методы в торговле: Учебное пособие*. -Новосибирск, СибУПК, 1998.
6. Щедрин И.И., Кархов А.Н. *Экономико-математические методы в торговле*. -М.: Экономика, 1980