Дифференциальные уравнения
Контрольная работа
Вариант 19
Часть 1

Задание 1.

Построить интегральные кривые при помощи изоклин
$(-4x-3y)dx+(9x-3y)dy=0$.

Решение.

$\frac{dy}{dx}=\frac{4x+3y}{9x-3y}$.

Полагая $\frac{dy}{dx}=k, k=const$, получаем, что изоклинами являются прямые

$\frac{4x+3y}{9x-3y}=k$,

$4x+3y=9kx-3ky$;

$3y+3ky=9kx-4x$;

$y=\frac{9kx-4x}{3+3k}=\frac{9k-4}{3+3k}x$, проходящие через начало координат.

При

$k=-2$ имеем изоклину $y=\frac{22}{3}x$; $tg\alpha=-2\Rightarrow\alpha=-63°$;

$k=-\frac{2}{3}$ имеем изоклину $y=-10x$; $tg\alpha=-\frac{2}{3}\Rightarrow\alpha=-34°$;

$k=-\frac{1}{3}$ имеем изоклину $y=-\frac{7}{2}x$; $tg\alpha=-\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=-18°$;

$k=0$ имеем изоклину $y=-\frac{4}{3}x$; $tg\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$;

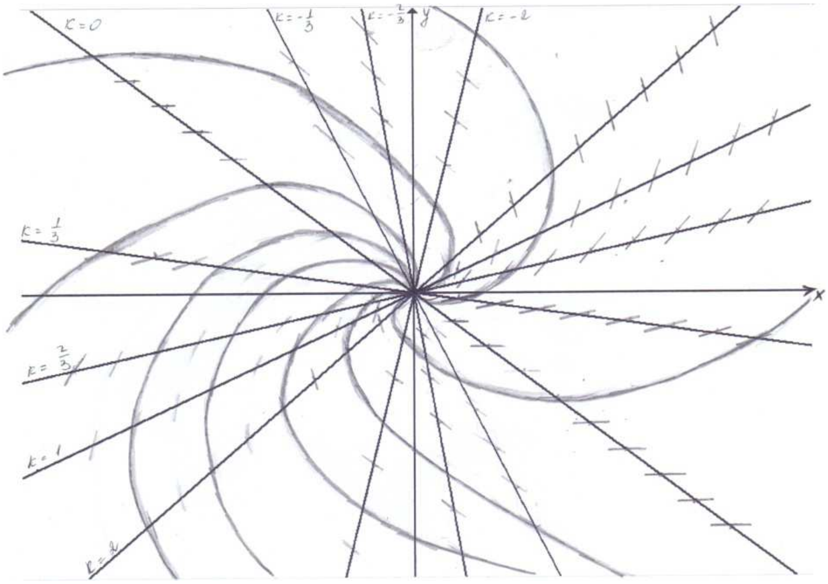
$k=\frac{1}{3}$ имеем изоклину $y=-\frac{1}{4}x$; $tg\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=18°$;

$k=\frac{2}{3}$ имеем изоклину $y=\frac{2}{5}x$; $tg\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\alpha=34°$;

$k=1$ имеем изоклину $y=\frac{5}{6}x$; $tg\alpha=1\Rightarrow\alpha=45°$;

$k=2$ имеем изоклину $y=\frac{14}{9}x$; $tg\alpha=2\Rightarrow\alpha=63°$.

В точке (0; 0) пересекаются все изоклины данного уравнения (особая точка уравнения). С помощью полученных изоклин строим интегральные кривые.



Задание 2.
Решить уравнение. Сделать проверку.
$e^{y^2+5}dx+\sin(9x)^2\,ydy=0$.

Решение.
Преобразуем данное уравнение:
$e^{y^2+5}dx=-\sin(9x)^2\,ydy$;
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y^2+5}}{\sin(9x)^2\,y}.$$
Разделяем переменные и интегрируем:
$$\frac{y}{e^{y^2+5}}dy=-\frac{dx}{\sin(9x)^2};$$
$$\int\frac{y}{e^{y^2+5}}dy=-\int\frac{dx}{\sin(9x)^2}.$$
Найдем интегралы.
1) $\int\frac{y}{e^{y^2+5}}dy$.
Введем новую переменную $u=y^2+5$, $du=2ydy$. Получим:
$$\int\frac{y}{e^{y^2+5}}dy=\frac{1}{2}\int\frac{du}{e^u}=\frac{1}{2}\int e^{-u}du=-\frac{1}{2}e^{-u}.$$
Выполним обратную замену:
$$\int\frac{y}{e^{y^2+5}}dy=-\frac{1}{2}e^{-u}=-\frac{1}{2}e^{-(y^2+5)}.$$
2) $\int\frac{dx}{\sin(9x)^2}$.
Делаем замену переменных:
$ctg9x=u\Rightarrow x=\frac{1}{9}arcctgu$, $dx=-\frac{1}{9(1+u^2)}du$. Получим:
$$\int\frac{dx}{\sin(9x)^2}=-\int\frac{1}{9(1+u^2)\sin\left(9\cdot\frac{1}{9}arcctgu\right)^2}du=-\frac{1}{9}\int\frac{1}{(1+u^2)\sin(arcctgu)^2}du=$$
$$=-\frac{1}{9}\int\frac{1}{(1+u^2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}du=-\frac{1}{9}\int du=-\frac{1}{9}u+C.$$
Выполним обратную замену:
$$\int\frac{dx}{\sin(9x)^2}=-\frac{1}{9}u+C=-\frac{1}{9}ctg9x+C.$$
Следовательно:
$$\int\frac{y}{e^{y^2+5}}dy=-\int\frac{dx}{\sin(9x)^2}\Rightarrow$$

$-\frac{1}{2}e^{-y^2-5}=\frac{1}{9}ctg9x+C$.

$e^{-y^2-5}=-\frac{2}{9}ctg9x-2C$;

$-(y^2+5)=\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)$;

$y=\pm\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}$

Выполним проверку. Для этого найдем y':

$$y'=\left(\pm\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}\right)'=\pm\frac{-\frac{-\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{9}{\sin^2 9x}\right)}{-\frac{2}{9}ctg9x-2C}}{2\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}=$$

$$=\pm\frac{\frac{9}{(ctg9x-18C)\sin^2 9x}}{2\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}=\pm\frac{9}{2(ctg9x-18C)\sin^2 9x\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\pm\frac{9}{2(ctg9x-18C)\sin^2 9x\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}=-\frac{e^{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5+5}}{\pm\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}\cdot\sin(9x)^2};$$

$$\pm\frac{9}{2(ctg9x-18C)\sin^2 9x\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}=-\frac{\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)^{-1}}{\sin(9x)^2\cdot\pm\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}};$$

$$\pm\frac{9}{2(ctg9x-18C)\sin^2 9x\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}=$$

$$=\pm\frac{9}{2(ctg9x-18C)\sin^2(9x)\cdot\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}}.$$

Равенство правильное.

Ответ: $y=\pm\sqrt{-\ln\left(-\frac{2}{9}ctg9x-2C\right)-5}$.

Задание 3.
Решить уравнение. Сделать проверку.
$\dfrac{dy}{dx}=(4x+8y+4)\ln(4x+8y+4)-\dfrac{1}{2}$.

Решение.
Введем новую переменную:
$v=4x+8y$, тогда $\dfrac{dv}{dx}=4+8\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{8}\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{1}{2}$. Получим:
$\dfrac{1}{8}\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{1}{2}=(v+4)\ln(v+4)-\dfrac{1}{2}$;
$\dfrac{dv}{dx}=8(v+4)\ln(v+4)$.
Разделяем переменные и интегрируем:
$\dfrac{dv}{(v+4)\ln(v+4)}=8dx$;
$\displaystyle\int\frac{dv}{(v+4)\ln(v+4)}=\int 8dx$;
$\displaystyle\int\frac{d(\ln(v+4))}{\ln(v+4)}=\int 8dx$;
$\ln\ln(v+4)=8x+C$;
$\ln(v+4)=e^{8x+C}$;
$v=e^{e^{8x+C}}-4$.
Выполним обратную замену:
$4x+8y=e^{e^{8x+C}}-4$;
$y=\dfrac{1}{8}e^{e^{8x+C}}-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
Выполним проверку. Для этого найдем y':
$$y'=\left(\frac{1}{8}e^{e^{8x+C}}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)'=\frac{1}{8}e^{e^{8x+C}}\cdot e^{8x+C}\cdot 8-\frac{1}{2}=e^{e^{8x+C}}\cdot e^{8x+C}-\frac{1}{2}.$$
Подставляя найденные значения в исходное уравнение, получим:
$$e^{e^{8x+C}}\cdot e^{8x+C}-\frac{1}{2}=(4x+8\cdot\left(\frac{1}{8}e^{e^{8x+C}}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+4)\ln(4x+8\cdot\left(\frac{1}{8}e^{e^{8x+C}}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+4)-\frac{1}{2};$$
$$e^{e^{8x+C}}\cdot e^{8x+C}-\frac{1}{2}=(4x+e^{e^{8x+C}}-4x-4+4)\ln(4x+e^{e^{8x+C}}-4x-4+4)-\frac{1}{2};$$
$$e^{e^{8x+C}}\cdot e^{8x+C}-\frac{1}{2}=e^{e^{8x+C}}\ln(e^{e^{8x+C}})-\frac{1}{2};$$
$$e^{e^{8x+C}}\cdot e^{8x+C}-\frac{1}{2}=e^{e^{8x+C}}e^{8x+C}-\frac{1}{2}.$$
Получили правильное равенство.

Ответ: $y=\dfrac{1}{8}e^{e^{8x+C}}-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Задание 4.

Показать, что уравнение является однородным и решить его. Сделать проверку.

$$\frac{dy}{dx}=\sin\left(\frac{5x+y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}.$$

Решение.

Проверим функцию $f(x,y)=\sin\left(\frac{5x+y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}$ на однородность:

$$f(x,y)=\sin\left(\frac{5(\lambda x)+(\lambda y)}{(\lambda x)}\right)^2+\frac{(\lambda y)}{(\lambda x)}=f(x,y).$$

Следовательно, заданное уравнение является однородным.

Делаем подстановку $\frac{y}{x}=t$, $y=xt$, $y'=t+xt'$.

Уравнение $\frac{dy}{dx}=\sin\left(\frac{5x+y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}$ примет вид $t+xt'=\sin\left(\frac{5x+tx}{x}\right)^2+\frac{tx}{x}$ или $t+xt'=\sin(5+t)^2+t$;

$$xt'=\sin(5+t)^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\sin(5+t)^2}{x};$$

$$\frac{dt}{\sin(5+t)^2}=\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{dt}{\sin(5+t)^2}=\int\frac{dx}{x}.$$

Делаем замену переменных:

$ctg(5+t)=u\Rightarrow t=arcctgu-5$, $dt=-\frac{1}{1+u^2}du$. Получим:

$$\int-\frac{1}{(1+u^2)\sin^2(5+arcctgu-5)}du=\int\frac{dx}{x};$$

$$-\int\frac{1}{(1+u^2)\sin^2(arcctgu)}du=\int\frac{dx}{x};$$

$$-\int\frac{1}{(1+u^2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2}du=\int\frac{dx}{x};$$

$$-\int du=\int\frac{dx}{x};$$

$$-u=\ln x+C.$$

Выполним обратную замену:

$$-ctg(5+t)=\ln x+C;$$

$t = arcctg(-\ln x - C) - 5$;

$\frac{y}{x} = arcctg(-\ln x - C) - 5$;

$y = xarcctg(-\ln x - C) - 5x$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y' = \left(xarcctg(-\ln x - C) - 5x\right)' = arcctg(-\ln x - C) + x \cdot \left(-\frac{-\frac{1}{x}}{1 + (\ln x + C)^2}\right) - 5 =$$

$$= arcctg(-\ln x - C) + \frac{1}{1 + (\ln x + C)^2} - 5.$$

Получим:

$$arcctg(-\ln x - C) + \frac{1}{1 + (\ln x + C)^2} - 5 = \sin\left(\frac{5x + xarcctg(-\ln x - C) - 5x}{x}\right)^2 + \frac{xarcctg(-\ln x - C) - 5x}{x}$$

$$arcctg(-\ln x - C) + \frac{1}{1 + (\ln x + C)^2} - 5 = \sin\left(arcctg(-\ln x - C)\right)^2 + arcctg(-\ln x - C) - 5;$$

$$arcctg(-\ln x - C) + \frac{1}{1 + (\ln x + C)^2} - 5 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\ln x - C\right)^2}}\right)^2 + arcctg(-\ln x - C) - 5;$$

$$arcctg(-\ln x - C) + \frac{1}{1 + (\ln x + C)^2} - 5 = \left(\frac{1}{1 + \left(\ln x + C\right)^2}\right) + arcctg(-\ln x - C) - 5.$$

Получили правильное равенство.

Ответ: $y = xarcctg(-\ln x - C) - 5x$.

Задание 5.

Решить уравнение методом Бернулли. Сделать проверку. Найти решение задачи Коши.

$$\frac{dy}{dx}-4y=3x+1, y(0)=1.$$

Решение.

Это линейное, неоднородное уравнение первого порядка. Будем искать его решение, по методу Бернулли, в виде $y=uv$. Тогда производная $y'=u'v+v'u$. Подставим в исходное уравнение. Получим:

$$u'v+v'u-4uv=3x+1;$$

$$(u'-4u)v+v'u=3x+1.$$

Примем, что:

$u'-4u=0$ и

$v'u=3x+1$.

Решим эти уравнения.

$$u'-4u=0;$$

$$\frac{du}{dx}=4u.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{u}=4dx;$$

$$\int\frac{du}{u}=\int 4dx;$$

$$\ln u=4x;$$

$$u=e^{4x}.$$

Подставим значение u во второе уравнение, получим:

$$v'e^{4x}=3x+1.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{3x+1}{e^{4x}};$$

$$dv=\frac{3x+1}{e^{4x}}dx;$$

$$\int dv=\int\frac{3x+1}{e^{4x}}dx;$$

$$v=3\int xe^{-4x}dx+\int e^{-4x}dx.$$

Найдем интеграл $\int xe^{-4x}dx$.

Применим способ интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$. Пускай:

$$u=x;$$

$$dv=e^{-4x}dx.$$

Тогда:

$$du=dx;$$

$v=\int e^{-4x}dx=-\frac{1}{4}e^{-4x}$.

Следовательно:

$\int xe^{-4x}dx=-\frac{1}{4}xe^{-4x}+\int -\frac{1}{4}e^{-4x}dx=-\frac{1}{4}xe^{-4x}-\frac{1}{16}e^{-4x}$.

Получим:

$v=3\int xe^{-4x}dx+\int e^{-4x}dx=-\frac{3}{4}xe^{-4x}-\frac{3}{16}e^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-4x}+C=-\frac{3}{4}xe^{-4x}-\frac{7}{16}e^{-4x}+C$.

Тогда, общее решение исходного дифференциального уравнения запишется:

$y=uv=e^{4x}\cdot\left(-\frac{3}{4}xe^{-4x}-\frac{7}{16}e^{-4x}+C\right)=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}+Ce^{4x}$.

Воспользуемся начальным условием для определения неизвестного С.

$y(0)=-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{16}+Ce^{4\cdot 0}=-\frac{7}{16}+C=1\Rightarrow C=\frac{23}{16}$.

Тогда частное решение запишется:

$y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}+\frac{23}{16}e^{4x}$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$y'=\left(-\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}+Ce^{4x}\right)'=-\frac{3}{4}+4Ce^{4x}$.

Получим:

$-\frac{3}{4}+4Ce^{4x}-4\left(-\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}+Ce^{4x}\right)=3x+1$;

$-\frac{3}{4}+4Ce^{4x}+3x+\frac{7}{4}-4Ce^{4x}=3x+1$;

$3x+1=3x+1$.

Получили правильное равенство.

Ответ: $y_O=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}+Ce^{4x}$, $y_{÷}=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}+\frac{23}{16}e^{4x}$.

Задание 6.

Решить уравнение. Сделать проверку.

$\frac{dy}{dx}+6x^3y=8x^3e^{7x^4}y^2$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на y^2, получим:

$\frac{dy}{y^2dx}+\frac{6x^3}{y}=8x^3e^{7x^4}$.

Введем новую переменную $v=\frac{1}{y}$, тогда $\frac{dv}{dx}=-\frac{dy}{y^2dx}$. Получим:

$-\frac{dv}{dx}+6x^3v=8x^3e^{7x^4}$.

Помножим обе части уравнения на $-e^{-\frac{3x^4}{2}}$, получим:

$e^{-\frac{3x^4}{2}}\frac{dv}{dx}-6e^{-\frac{3x^4}{2}}x^3v=-8x^3e^{7x^4}\cdot e^{-\frac{3x^4}{2}}$;

$e^{-\frac{3x^4}{2}}\frac{dv}{dx}-6e^{-\frac{3x^4}{2}}x^3v=-8x^3e^{\frac{11x^4}{2}}$;

$e^{-\frac{3x^4}{2}}\frac{dv}{dx}+\frac{d}{dx}(e^{-\frac{3x^4}{2}})v=-8x^3e^{\frac{11x^4}{2}}$.

Согласно правилу дифференцирования произведения функций $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(f(x)\cdot g(x))'$, получим:

$\frac{d\left(e^{-\frac{3x^4}{2}}v\right)}{dx}=-8x^3e^{\frac{11x^4}{2}}$.

Интегрируем обе части уравнения:

$\int\frac{d\left(e^{-\frac{3x^4}{2}}v\right)}{dx}dx=\int-8x^3e^{\frac{11x^4}{2}}dx$;

$e^{-\frac{3x^4}{2}}v=-8\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{4}\int e^{\frac{11x^4}{2}}d\left(\frac{11x^4}{2}\right)$;

$e^{-\frac{3x^4}{2}}v=-\frac{4}{11}e^{\frac{11x^4}{2}}+C$;

$v=-\frac{4}{11}e^{7x^4}+C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}$.

Выполним обратную замену:

$\frac{1}{y}=-\frac{4}{11}e^{7x^4}+C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}$;

$y=\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y'=\left(\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}\right)'=-\frac{11\cdot\left(-112x^3e^{7x^4}+66Cx^3e^{\frac{3x^4}{2}}\right)}{\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)^2}.$$

Получим:

$$-\frac{11\cdot\left(-112x^3e^{7x^4}+66Cx^3e^{\frac{3x^4}{2}}\right)}{\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)^2}+6x^3\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}=8x^3e^{7x^4}\left(\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}\right)^2;$$

$$-\frac{11\cdot\left(-112x^3e^{7x^4}+66Cx^3e^{\frac{3x^4}{2}}\right)-66x^3\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)}{\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)^2}=8x^3e^{7x^4}\left(\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}\right)^2;$$

$$-\frac{11\cdot\left(-112x^3e^{7x^4}+66Cx^3e^{\frac{3x^4}{2}}+24x^3e^{7x^4}-66Cx^3e^{\frac{3x^4}{2}}\right)}{\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)^2}=8x^3e^{7x^4}\left(\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}\right)^2;$$

$$-\frac{11\cdot\left(-88x^3e^{7x^4}\right)}{\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)^2}=8x^3e^{7x^4}\left(\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}\right)^2;$$

$$8x^3e^{7x^4}\frac{11^2}{\left(-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}\right)^2}=8x^3e^{7x^4}\left(\frac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}\right)^2.$$

Равенство верно.

Ответ: $y=\dfrac{11}{-4e^{7x^4}+11C\cdot e^{\frac{3x^4}{2}}}$.

Задание 7.

Решить уравнение в полных дифференциалах. Сделать проверку.

$(28\cos(4x+3y)+28y^3e^{7x})dx+(21\cos(4x+3y)+12y^2e^{7x})dy=0$.

Решение.

Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d\left(28\cos(4x+3y)+28y^3e^{7x}\right)}{dy}=-84\sin(4x+3y)+84y^2e^{7x};$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{d\left(21\cos(4x+3y)+12y^2e^{7x}\right)}{dx}=-84\sin(4x+3y)+84y^2e^{7x}.$$

Так как $\dfrac{dM}{dy}=\dfrac{dN}{dx}$, то данное уравнение есть уравнением в полных дифференциалах, следовательно, общий дифференциал уравнения имеет вид $u(x,y)=C$.

$u(x,y)=\int\left(28\cos(4x+3y)+28y^3e^{7x}\right)dx+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ пока неопределенная функция.

Интегрируя, получаем:

$$u(x,y)=\int\left(28\cos(4x+3y)+28y^3e^{7x}\right)dx+\varphi(y)=7\sin(4x+3y)+4y^3e^{7x}+\varphi(y).$$

Частная производная $\dfrac{du}{dy}$ найденной функции $u(x,y)$ должна равняться $\left(21\cos(4x+3y)+12y^2e^{7x}\right)$, что дает:

$$\left(7\sin(4x+3y)+4y^3e^{7x}+\varphi(y)\right)'_y=21\cos(4x+3y)+12y^2e^{7x};$$

$$21\cos(4x+3y)+12y^2e^{7x}+\varphi'(y)=21\cos(4x+3y)+12y^2e^{7x};$$

$$\varphi'(y)=0;$$

так что

$$\varphi(y)=\int 0dx=C.$$

Таким образом, $u(x,y)=7\sin(4x+3y)+4y^3e^{7x}+C.$

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$7\sin(4x+3y)+4y^3e^{7x}=C.$$

Ответ: $7\sin(4x+3y)+4y^3e^{7x}=C.$

Задание 8.

Решить уравнение при помощи интегрирующего множителя. Сделать проверку.

$$ydx+(2x+x\ln(3x))dy=0.$$

Решение.

Проверим, что данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dy}{dy}=1;$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{d\left(2x+x\ln(3x)\right)}{dx}=2+\ln(3x)+\frac{x}{3x}\cdot 3=3+\ln(3x).$$

Так как $\frac{dM}{dy}\neq\frac{dN}{dx}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Попробуем подобрать интегрирующий множитель, чтобы преобразовать уравнение к указанному типу. Вычислим функцию $\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=1-3-\ln(3x)=-2-\ln(3x)$.

Можно заметить, что выражение $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=\frac{1}{2x+x\ln(3x)}\cdot\left(-2-\ln(3x)\right)=-\frac{1}{x}$ зависит только от переменной x. Следовательно, интегрирующий множитель будет также зависеть лишь от x.

Мы можем найти его из уравнения:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=-\frac{1}{x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\mu|=-\ln|x|;$$

$$\mu=\pm\frac{1}{x}.$$

Выберем $\mu=\frac{1}{x}$. Умножая исходное дифференциальное уравнение на $\mu=\frac{1}{x}$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{y}{x}dx+(2+\ln(3x))dy=0.$$

В самом деле, теперь мы имеем:

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d(\frac{y}{x})}{dy}=\frac{1}{x};$$

$\frac{dN}{dx} = \frac{d\left(2+\ln(3x)\right)}{dx} = \frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{1}{x}$.

Решим уравнение $\frac{y}{x}dx + (2+\ln(3x))dy = 0$.

$u(x,y) = \int \frac{y}{x}dx + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ пока неопределенная функция.

Интегрируя, получаем:

$u(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + \varphi(y)$.

Частная производная $\frac{du}{dy}$ найденной функции $u(x,y)$ должна равняться $\left(2+\ln(3x)\right)$, что дает:

$\left(y\ln x + \varphi(y)\right)'_y = 2+\ln(3x)$;

$\ln x + \varphi'(y) = 2+\ln(3x)$;

$\varphi'(y) = 2+\ln(3x) - \ln x$;

так что

$\varphi(y) = \int (2+\ln(3x)-\ln x)dy = (2+\ln(3x)-\ln x)y + C$.

Таким образом, $u(x,y) = y\ln x + (2+\ln(3x)-\ln x)y + C = (2+\ln(3x))y + C$.

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$y(\ln 3x + 2) = C$;

$y = \frac{C}{\ln 3x + 2}$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y' = \left(\frac{C}{\ln 3x+2}\right)' = C\cdot\left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln 3x+2)^2}\right) = -\frac{C}{x(\ln 3x+2)^2}.$$

Подставив найденные значения в данное уравнение, получим:

$$\frac{C}{\ln 3x+2} = -(2x + x\ln(3x))\cdot\left(-\frac{C}{x(\ln 3x+2)^2}\right);$$

$$\frac{C}{\ln 3x+2} = (2+\ln(3x))\cdot\left(\frac{C}{(\ln 3x+2)^2}\right);$$

$$\frac{C}{\ln 3x+2} = \frac{C}{\ln 3x+2}.$$

Равенство верно.

Ответ: $y = \frac{C}{\ln 3x+2}$.

Часть2

Задание 9.

Решить уравнение. Сделать проверку.

$y = xy' + 8y' \cdot e^{y'} + 2y'$.

Решение.

Продифференцируем обе части уравнения по *x*, получим:

$y' = y' + xy'' + 8y'' \cdot e^{y'} + 8y' \cdot e^{y'} \cdot y'' + 2y''$;

$xy'' + 8y'' \cdot e^{y'} + 8y' \cdot e^{y'} \cdot y'' + 2y'' = 0$;

$y''(x + 8e^{y'} + 8y' \cdot e^{y'} + 2) = 0$;

$y'' = 0$ или $x + 8e^{y'} + 8y' \cdot e^{y'} + 2 = 0$.

Если $y'' = 0$, то $y' = \int 0dx = C_1$.

В уравнение $x + 8e^{y'} + 8y' \cdot e^{y'} + 2 = 0$ заменим $y' = C_1$, получим:

$y = xC_1 + 8C_1 \cdot e^{C_1} + 2C_1$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$y' = C_1$.

$xC_1 + 8C_1 \cdot e^{C_1} + 2C_1 = xC_1 + 8C_1e^{C_1} + 2C_1$.

Равенство верно.

Ответ: $y = xC_1 + 8C_1 \cdot e^{C_1} + 2C_1$.

Задание 10.

Решить уравнение. Сделать проверку.

$y = 3xy'^2 + \frac{3}{y'}$.

Решение.

Решим уравнение методом интегрирования уравнений первого порядка, не разрешенных относительно первой производной. Вводим параметр $p = y'$ или $p = \frac{dy}{dx}$, $dy = pdx$.

$$y = 3xp^2 + \frac{3}{p} \qquad (*)$$

Таким образом, функция у будет иметь вид:

$$dy = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dp}dp;$$

$$dy = 3p^2dx - \frac{3}{p^2}dp;$$

$$pdx = 3p^2dx - \frac{3}{p^2}dp;$$

$$\frac{3}{p^2}dp = (3p^2 - p)dx.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{3}{p^2(3p^2 - p)}dp = dx;$$

$$\int \frac{3}{p^3(3p-1)}dp = \int dx.$$

Найдем интеграл $\int \frac{3}{p^3(3p-1)}dp$.

Разбиваем дробь $\frac{3}{p^3(3p-1)}$ на сумму элементарных дробей:

$$\frac{3}{p^3(3p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{Dp+E}{3p-1} = \frac{Ap^2(3p-1) + Bp(3p-1) + C(3p-1) + (Dp+E)p^3}{p^3(3p-1)} =$$

$$= \frac{3Ap^3 - Ap^2 + 3Bp^2 - Bp + 3pC - C + Dp^4 + Ep^3}{p^3(3p-1)} =$$

$$= \frac{Dp^4 + (3A+E)p^3 + (3B-A)p^2 + (3C-B)p - C}{p^3(3p-1)}.$$

$$\begin{cases} D = 0; \\ 3A + E = 0; \\ 3B - A = 0; \\ 3C - B = 0; \\ -C = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0; \\ E = 81; \\ A = -27; \\ B = -9; \\ C = -3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{3}{p^3(3p-1)}dp = \int\left(-\frac{27}{p}-\frac{9}{p^2}-\frac{3}{p^3}+\frac{81}{3p-1}\right)dp = -27\ln p+\frac{9}{p}+\frac{3}{2p^2}+27\ln(3p-1).$$

Значит $\int \frac{3}{p^3(3p-1)}dp = \int dx \Rightarrow x = -27\ln p+\frac{9}{p}+\frac{3}{2p^2}+27\ln(3p-1)$.

Подставляя это решение в (*), находим y, как функцию от p:

$$y = 3p^2(-27\ln p+\frac{9}{p}+\frac{3}{2p^2}+27\ln(3p-1))+\frac{3}{p} = -81p^2\ln p+27p+\frac{9}{2}+81p^2\ln(3p-1)+\frac{3}{p}.$$

Таким образом, получили решение уравнения $y = 3xy'^2+\frac{3}{y'}$ в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -27\ln p+\frac{9}{p}+\frac{3}{2p^2}+27\ln(3p-1); \\ y = -81p^2\ln p+27p+\frac{9}{2}+81p^2\ln(3p-1)+\frac{3}{p}. \end{cases}$$

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x'_p}{y'_p} = \frac{-\frac{27}{p}-\frac{9}{p^2}-\frac{3}{p^3}+\frac{81}{3p-1}}{-162p\ln p-81p+27+162p\ln(3p-1)+\frac{243p^2}{3p-1}-\frac{3}{p^2}}.$$

Подставив найденные значения в уравнение $y = 3xy'^2+\frac{3}{y'}$ убеждаемся, что система $\begin{cases} x = -27\ln p+\frac{9}{p}+\frac{3}{2p^2}+27\ln(3p-1); \\ y = -81p^2\ln p+27p+\frac{9}{2}+81p^2\ln(3p-1)+\frac{3}{p}. \end{cases}$ является решением данного уравнения.

Ответ: $\begin{cases} x = -27\ln p+\frac{9}{p}+\frac{3}{2p^2}+27\ln(3p-1); \\ y = -81p^2\ln p+27p+\frac{9}{2}+81p^2\ln(3p-1)+\frac{3}{p}. \end{cases}$

Задание 11.

Решить уравнение. Сделать проверку.

$x = 3\ln(y') + 2$.

Решение.

Выразим в данном уравнении y':

$y' = e^{\frac{x-2}{3}}$.

Интегрируя обе части уравнения, получим:

$$y = \int e^{\frac{x-2}{3}} dx = 3\int e^{\frac{x-2}{3}} d\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3e^{\frac{x-2}{3}} + C.$$

Выполним проверку. Для этого найдем y' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y' = \left(3e^{\frac{x-2}{3}} + C\right)' = 3e^{\frac{x-2}{3}} \cdot \frac{1}{3} = e^{\frac{x-2}{3}};$$

$x = 3\ln(e^{\frac{x-2}{3}}) + 2$;

$x = 3 \cdot \dfrac{x-2}{3} \cdot \ln e + 2$;

$x = x - 2 + 2$;

$x = x$.

Равенство верно.

Ответ: $y = 3e^{\frac{x-2}{3}} + C$.

Задание 12.

Понизить порядок уравнения $2y'''y'y+e^{7x}y''^3=0$.

Решение.

Сделаем замену: $y'(x)=uy$, тогда

$y''=y'u+yu'=yu^2+yu'=y(u^2+u')$,

$y'''=y'(u^2+u')+y(u^2+u')'=y(u^3+3uu'+u'')$.

Подставив в исходное уравнение, получим:

$2y(u^3+3uu'+u'')uyy+e^{7x}y^3(u^2+u')^3=0$.

Разделим обе части уравнения на y^3:

$2(u^3+3uu'+u'')u+e^{7x}(u^2+u')^3=0$;

$2u^4+6u^2u'+2uu''+e^{7x}(u^6+3u^4u'+3u^2u'^2+u'^3)=0$;

$2u^4+6u^2u'+2uu''+u^6e^{7x}+3u^4u'e^{7x}+3u^2u'^2e^{7x}+u'^3e^{7x}=0$;

$2uu''++3u^2u'^2e^{7x}+u'^3e^{7x}+(6u^2+3u^4e^{7x})u'+2u^4+u^6e^{7x}=0$.

Получили дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной u.

Задание 13.

Понизить порядок уравнения $y''+y'e^{6x}=0$.

Решение.

Сделаем замену: $y'(x)=z(x)$, тогда $y''=z'$. Получим:

$z'+ze^{6x}=0$.

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить, разделив переменные и проинтегрировав.

Задание 14.

Понизить порядок уравнения $7y''y+e^{y'}=0$.

Решение.

Уравнение не содержит независимого переменного x. Полагая, $y'=p$, $y''=pp'$ получаем уравнение:

$7pp'y+e^p=0$.

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить, разделив переменные и проинтегрировав.

Задание 15.

Решить линейное неоднородное уравнение, если известно частное решение y_1 соответствующего однородного уравнения. Сделать проверку.

$xy'' - xy = 4xe^{-x}$, $y_1 = e^{-x}$.

Решение.

Найдем второе независимое решение однородного уравнения $xy'' - xy = 0$, используя формулу Лиувилля-Остроградского. Учитывая, что $y_1 = e^{-x}$, имеем:

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = C\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right] \Rightarrow y_2' y_1 - y_1' y_2 = C\exp\left[-\int \frac{0}{-x}dx\right] = C.$$

Разделив уравнение на $y_1^2 = e^{-2x}$, получаем:

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C}{e^{-2x}};$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = Ce^{2x}.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int Ce^{2x}dx = \frac{1}{2}Ce^{2x}.$$

Отсюда $y_2 = \frac{1}{2}Ce^{2x} \cdot e^{-x} = \frac{1}{2}Ce^{x}$.

Переобозначив постоянные C_1 и C_2, можно общее решение однородного уравнения представить как $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$.

Теперь построим общее решение неоднородного уравнения. В соответствии с методом вариации постоянных, будем искать его в виде:

$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции. Которые определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' e^{x} = 0, \\ -C_1' e^{-x} + C_2' e^{x} = 4e^{-x}. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$2C_2' e^{x} = 4e^{-x};$$

$$C_2' = 2e^{-2x};$$

$$C_2 = \int 2e^{-2x}dx = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C_2 = -e^{-2x} + A_2.$$

Из первого уравнения получим:

$$C_1' e^{-x} + 2e^{-2x}e^{x} = 0;$$

$$C_1' e^{-x} = -2e^{-x};$$

$$C_1' = -2;$$

$$C_1 = -2\int dx = -2x + A_1.$$

Итак, мы получили общее решение исходного уравнения в виде:

$y(x) = (-2x + A_1)e^{-x} + (-e^{-2x} + A_2)e^{x}$;

$y(x) = -2xe^{-x} + A_1e^{-x} - e^{-x} + A_2e^{x}$;

$y(x) = A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2xe^{-x} - e^{-x}$;

$y(x) = (A_1 - 1)e^{-x} + A_2e^{x} - 2xe^{-x}$.

Приняв $A_1 - 1 = A_1$, получим:

$y(x) = A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2xe^{-x}$.

Выполним проверку. Для этого найдем y'' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$y' = \left(A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2xe^{-x}\right)' = -A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2(e^{-x} - xe^{-x}) = -A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x}$;

$y'' = \left(-A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x}\right)' = A_1e^{-x} + A_2e^{x} + 2e^{-x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} =$

$= A_1e^{-x} + A_2e^{x} + 4e^{-x} - 2xe^{-x}$.

$x(A_1e^{-x} + A_2e^{x} + 4e^{-x} - 2xe^{-x}) - x(A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2xe^{-x}) = 4xe^{-x}$;

$x(A_1e^{-x} + A_2e^{x} + 4e^{-x} - 2xe^{-x} - A_1e^{-x} - A_2e^{x} + 2xe^{-x}) = 4xe^{-x}$;

$4xe^{-x} = 4xe^{-x}$.

Равенство верно.

Ответ: $y(x) = A_1e^{-x} + A_2e^{x} - 2xe^{-x}$.

Задание 16.

Записать решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения:

$[4,4,8,8,8,0,0,6i,-6i,6i,-6i]$.

Решение.

Принимая во внимание ,что:

- каждому действительному простому корню k соответствует частное решение e^{kx};

- каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствует два частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

- каждому действительному корню k кратности μ соответствует μ линейно независимых частных решений: e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, …, $x^{\mu-1}e^{kx}$;

- каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности μ соответствует 2μ частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^2e^{\alpha x}\cos\beta x$, …, $x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $x^2e^{\alpha x}\sin\beta x$, …, $x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение получаем по формуле $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$, в которой $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно-независимые решение.

Решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, имеющим корни характеристического уравнения $[4,4,8,8,8,0,0,6i,-6i,6i,-6i]$, является:

$$y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3e^{8x} + c_4xe^{8x} + c_5x^2e^{8x} + c_6 + c_7x + c_8\cos 6x + c_9x\cos 6x + c_{10}\sin 6x + c_{11}x\sin 6x$$

Ответ:

$$y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3e^{8x} + c_4xe^{8x} + c_5x^2e^{8x} + c_6 + c_7x + c_8\cos 6x + c_9x\cos 6x + c_{10}\sin 6x + c_{11}x\sin 6x$$

Задание 17.

Записать решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения:

$[2, 9, 0, 0, 0, 2+2i, 2-2i, 2-2i, 2+2i]$.

Решение.

Принимая во внимание ,что:

- каждому действительному простому корню k соответствует частное решение e^{kx};

- каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствует два частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

- каждому действительному корню k кратности μ соответствует μ линейно независимых частных решений: e^{kx}, xe^{kx}, $x^2 e^{kx}$, …, $x^{\mu-1}e^{kx}$;

- каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности μ соответствует 2μ частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x$, …, $x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x$, …, $x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение получаем по формуле $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, в которой $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно-независимые решение.

Решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, имеющим корни характеристического уравнения $[2, 9, 0, 0, 0, 2+2i, 2-2i, 2-2i, 2+2i]$, является:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{9x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + c_6 e^{2x}\cos 2x + c_7 x e^{2x}\cos 2x + c_8 e^{2x}\sin 2x + c_9 x e^{2x}\sin 2x$$

Ответ:

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{9x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + c_6 e^{2x}\cos 2x + c_7 x e^{2x}\cos 2x + c_8 e^{2x}\sin 2x + c_9 x e^{2x}\sin 2x$.

Задание 18.

Решить уравнение. Сделать проверку. Найти решение задачи Коши.

$8y''' - 16y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = 5$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение однородного уравнения $8y''' - 16y'' + 6y' = 0$. Получим уравнение:

$$8k^3 - 16k^2 + 6k = 0;$$

$$8k(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) = 0;$$

$$k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{2}; k_3 = \frac{3}{2}.$$

Общее решение однородного уравнения получим в виде:

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + c_3 e^{\frac{3}{2}x}.$$

Выполним проверку. Для этого найдем y', y'', y''' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y' = \left(c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + c_3 e^{\frac{3}{2}x} \right)' = \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} c_3 e^{\frac{3}{2}x};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} c_3 e^{\frac{3}{2}x} \right)' = \frac{1}{4} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{9}{4} c_3 e^{\frac{3}{2}x};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{4} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{9}{4} c_3 e^{\frac{3}{2}x} \right)' = \frac{1}{8} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{27}{8} c_3 e^{\frac{3}{2}x}.$$

$$8 \cdot (\frac{1}{8} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{27}{8} c_3 e^{\frac{3}{2}x}) - 16(\frac{1}{4} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{9}{4} c_3 e^{\frac{3}{2}x}) + 6(\frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} c_3 e^{\frac{3}{2}x}) = 0;$$

$$c_2 e^{\frac{1}{2}x} + 27 c_3 e^{\frac{3}{2}x} - 4 c_2 e^{\frac{1}{2}x} - 36 c_3 e^{\frac{3}{2}x} + 3 c_2 e^{\frac{1}{2}x} + 9 c_3 e^{\frac{3}{2}x} = 0;$$

$$0 = 0.$$

Равенство верно. Решение верно.

Начальные условия дают систему уравнений для определения констант:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ y'(0) = \frac{1}{2} c_2 + \frac{3}{2} c_3 = 3, \\ y''(0) = \frac{1}{4} c_2 + \frac{9}{4} c_3 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_2 + 3c_3 = 6, \\ c_2 + 9c_3 = 20; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_2 + 3c_3 = 6, \\ 6c_3 = 14; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{4}{3}, \\ c_2 = -1, \\ c_3 = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, частным решением уравнения является:

$$y = -\frac{4}{3} - e^{\frac{1}{2}x} + \frac{7}{3} e^{\frac{3}{2}x}.$$

Ответ: $y = -\frac{4}{3} - e^{\frac{1}{2}x} + \frac{7}{3} e^{\frac{3}{2}x}$.

Задание 19.

Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных. Сделать проверку.

$16y'' - 20y' + 4y = 5x$.

Решение.

Найдем y_{oo}. Для этого запишем соответствующее однородное уравнение $16y'' - 20y' + 4y = 0$, составим его характеристическое уравнение $16\lambda^2 - 20\lambda + 4 = 0$, найдем корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = 1$, запишем $y_{oo} = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^x$.

Теперь построим общее решение неоднородного уравнения. В соответствии с методом вариации постоянных, будем искать его в виде:

$y(x) = C_1(x) e^{\frac{x}{4}} + C_2(x) e^x$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции. Которые определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1' e^{\frac{x}{4}} + C_2' e^x = 0, \\ \frac{1}{4} C_1' e^{\frac{x}{4}} + C_2' e^x = \frac{5}{16} x. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$\frac{3}{4} C_1' e^{\frac{x}{4}} = -\frac{5}{16} x$;

$C_1' = -\frac{5}{12} x e^{-\frac{x}{4}}$;

$C_1 = \int -\frac{5}{12} x e^{-\frac{x}{4}} dx = -\frac{5}{12} \int x e^{-\frac{x}{4}} dx$.

Применим способ интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Пускай:

$u = x$;

$dv = e^{-\frac{x}{4}} dx$.

Тогда:

$du = dx$;

$v = \int e^{-\frac{x}{4}} dx = -4e^{-\frac{x}{4}}$.

Следовательно:

$$C_1 = -\frac{5}{12} \int x e^{-\frac{x}{4}} dx = -\frac{5}{12} \cdot \left(-4xe^{-\frac{x}{4}} - \int -4e^{-\frac{x}{4}} dx \right) = -\frac{5}{12} \cdot \left(-4xe^{-\frac{x}{4}} - 16e^{-\frac{x}{4}} \right) + A_1 = .$$

$$= \frac{5}{3} x e^{-\frac{x}{4}} + \frac{20}{3} e^{-\frac{x}{4}} + A_1$$

Из первого уравнения получим:

$-\frac{5}{12}xe^{-\frac{x}{4}}e^{\frac{x}{4}}+C_2'e^x=0$;

$C_2'e^x=\frac{5}{12}x$;

$C_2'=\frac{5}{12}xe^{-x}$;

$C_2=\frac{5}{12}\int xe^{-x}dx$.

Применим способ интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$. Пускай:

$u=x$;

$dv=e^{-x}dx$.

Тогда:

$du=dx$;

$v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}$.

Следовательно:

$C_2=\frac{5}{12}\int xe^{-x}dx=\frac{5}{12}\left(-e^{-x}x-\int -e^{-x}dx\right)=\frac{5}{12}\left(-e^{-x}x-e^{-x}\right)+A_2=-\frac{5}{12}e^{-x}x-\frac{5}{12}e^{-x}+A_2$.

Итак, мы получили общее решение исходного уравнения в виде:

$y=(\frac{5}{3}xe^{-\frac{x}{4}}+\frac{20}{3}e^{-\frac{x}{4}}+A_1)e^{\frac{1}{4}x}+(-\frac{5}{12}e^{-x}x-\frac{5}{12}e^{-x}+A_2)e^x$;

$y=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}+A_1e^{\frac{1}{4}x}-\frac{5}{12}x-\frac{5}{12}+A_2e^x$;

$y=\frac{5}{4}x+\frac{25}{4}+A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x$;

$y=A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x+\frac{5}{4}x+\frac{25}{4}$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и y'' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$y'=\frac{1}{4}A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x+\frac{5}{4}$;

$y''=\frac{1}{16}A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x$.

$16(\frac{1}{16}A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x)-20(\frac{1}{4}A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x+\frac{5}{4})+4(A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x+\frac{5}{4}x+\frac{25}{4})=5x$;

$A_1e^{\frac{1}{4}x}+16A_2e^x-5A_1e^{\frac{1}{4}x}-20A_2e^x-25+4A_1e^{\frac{1}{4}x}+4A_2e^x+5x+25=5x$;

$5x=5x$.

Равенство верно.

Ответ: $y=A_1e^{\frac{1}{4}x}+A_2e^x+\frac{5}{4}x+\frac{25}{4}$.

Задание 20.

Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов. Сделать проверку.

$y'' + 7y' + 12y = e^{5x}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$. Получим квадратное уравнение:

$k^2 + 7k + 12 = 0$;

$k_1 = -3; k_2 = -4$.

Общее решение однородного уравнения получим в виде:

$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}$.

Составим частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения $f(x)$ представляет собой функцию e^{5x}. Следовательно $\tilde{y} = Ae^{5x}$, где А – неопределенный коэффициент, который находим, подставляя $\tilde{y} = Ae^{5x}$ в исходное уравнение. Для этого найдем $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$.

$\tilde{y}' = \left(Ae^{5x}\right)' = 5Ae^{5x}$;

$\tilde{y}'' = \left(5Ae^{5x}\right)' = 25Ae^{5x}$.

Тогда получим:

$25Ae^{5x} + 7 \cdot 5Ae^{5x} + 12Ae^{5x} = e^{5x}$;

$25Ae^{5x} + 35Ae^{5x} + 12Ae^{5x} = e^{5x}$;

$72Ae^{5x} = e^{5x}$;

$72A = 1$;

$A = \frac{1}{72}$.

Следовательно: $\tilde{y} = \frac{1}{72} e^{5x}$.

Общее решение неоднородного уравнения получим, складывая y_O и $\tilde{y}$.

$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{72} e^{5x}$.

Выполним проверку. Для этого найдем y' и y'' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$y' = -3c_1 e^{-3x} - 4c_2 e^{-4x} + \frac{5}{72} e^{5x}$;

$y'' = 9c_1 e^{-3x} + 16c_2 e^{-4x} + \frac{25}{72} e^{5x}$.

$9c_1 e^{-3x} + 16c_2 e^{-4x} + \frac{25}{72} e^{5x} + 7(-3c_1 e^{-3x} - 4c_2 e^{-4x} + \frac{5}{72} e^{5x}) + 12(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{72} e^{5x}) = e^{5x}$;

$9c_1 e^{-3x} + 16c_2 e^{-4x} + \frac{25}{72} e^{5x} - 21c_1 e^{-3x} - 28c_2 e^{-4x} + \frac{35}{72} e^{5x} + 12c_1 e^{-3x} + 12c_2 e^{-4x} + \frac{12}{72} e^{5x} = e^{5x}$;

$e^{5x} = e^{5x}$. Равенство верно.

Ответ: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{72} e^{5x}$.

Задание 21.

Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов. Выполнить проверку.

$y''' - 8y'' + 12y' = (-48x - 28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение однородного уравнения $y''' - 8y'' + 12y' = 0$. Получим уравнение:

$k^3 - 8k^2 + 12k = 0$;

$k(k-2)(k-6) = 0$;

$k_1 = 0, k_2 = 2; k_3 = 6.$

Общее решение однородного уравнения получим в виде:

$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{6x}$.

Составим частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения $f(x)$ представляет собой функцию $(-48x - 28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10$. Следовательно $\tilde{y} = (Ax + B)xe^{2x} + Cx^3 + Dx^2 + Ex$, где A, B, C, D, E – неопределенные коэффициенты, которые находим, подставляя $\tilde{y} = (Ax + B)xe^{2x} + Cx^3 + Dx^2 + Ex$ в исходное уравнение. Для этого найдем $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и $\tilde{y}'''$.

$$\tilde{y}' = (2Ax + B)e^{2x} + (2Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 3Cx^2 + 2Dx + E = \\ = (2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)e^{2x} + 3Cx^2 + 2Dx + E;$$

$$\tilde{y}'' = (4Ax + 2A + 2B)e^{2x} + (4Ax^2 + 4Ax + 4Bx + 2B)e^{2x} + 2C = \\ = (4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x} + 6Cx + 2D;$$

$$\tilde{y}''' = (8Ax + 8A + 4B)e^{2x} + (8Ax^2 + 16Ax + 8Bx + 4A + 8B)e^{2x} = \\ = (8Ax^2 + 24Ax + 8Bx + 12A + 12B)e^{2x} + 6C.$$

$$(8Ax^2 + 24Ax + 8Bx + 12A + 12B)e^{2x} + 6C - 8((4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x} + 6Cx + 2D) + \\ + 12((2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)e^{2x} + 3Cx^2 + 2Dx + E) = (-48x - 28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10;$$

$$(8Ax^2 + 24Ax + 8Bx + 12A + 12B - 32Ax^2 - 64Ax - 32Bx - 16A - 32B + 24Ax^2 + 24xA + 24Bx + \\ + 12B)e^{2x} + 6C - 48Cx - 16D + 36Cx^2 + 24Dx + 12E = (-48x - 28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10;$$

$$(-16Ax - 4A - 8B)e^{2x} + 36Cx^2 + (-48C + 24D)x + 6C - 16D + 12E = \\ = (-48x - 28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10.$$

$$\begin{cases} -16A = -48; \\ -4A - 8B = -28; \\ 36C = 108; \\ -48C + 24D = -96; \\ 6C - 16D + 12E = 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3; \\ B = 2; \\ C = 3; \\ D = 2; \\ E = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $\tilde{y} = (3x + 2)xe^{2x} + 3x^3 + 2x^2 + 2x$.

Так как $y = y_{oo} + \tilde{y}$, то общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{6x} + (3x + 2)xe^{2x} + 3x^3 + 2x^2 + 2x$.

Выполним проверку. Для этого найдем y', y'' и y''' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$y' = 2c_2e^{2x} + 6c_3e^{6x} + (6x+2)e^{2x} + (6x^2+4x)e^{2x} + 9x^2 + 4x + 2 =$

$= 2c_2e^{2x} + 6c_3e^{6x} + (6x^2+10x+2)e^{2x} + 9x^2 + 4x + 2;$

$y'' = 4c_2e^{2x} + 36c_3e^{6x} + (12x+10)e^{2x} + (12x^2+20x+4)e^{2x} + 18x + 4 =$

$= 4c_2e^{2x} + 36c_3e^{6x} + (12x^2+32x+14)e^{2x} + 18x + 4;$

$y''' = 8c_2e^{2x} + 216c_3e^{6x} + (24x+32)e^{2x} + (24x^2+64x+28)e^{2x} + 18 =$

$= 8c_2e^{2x} + 216c_3e^{6x} + (24x^2+88x+60)e^{2x} + 18;$

$8c_2e^{2x} + 216c_3e^{6x} + (24x^2+88x+60)e^{2x} + 18 - 8(4c_2e^{2x} + 36c_3e^{6x} + (12x^2+32x+14)e^{2x} + 18x + 4) +$

$+12(2c_2e^{2x} + 6c_3e^{6x} + (6x^2+10x+2)e^{2x} + 9x^2 + 4x + 2) = (-48x-28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10;$

$(8c_2 - 32c_2 + 24c_2)e^{2x} + (216c_3 - 288c_3 + 72c_3)e^{6x} +$

$+(24x^2 + 88x + 60 - 96x^2 - 256x - 112 + 72x^2 + 120x + 24)e^{2x} + 18 - 144x - 32 +$

$+108x^2 + 48x + 24 = (-48x-28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10;$

$(-48x-28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10 = (-48x-28)e^{2x} + 108x^2 - 96x + 10.$

Равенство верно.

Ответ: $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{6x} + (3x+2)xe^{2x} + 3x^3 + 2x^2 + 2x$.

Задание 22.

Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов. Выполнить проверку.

$y'' - 6y' + 25y = 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x)$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение однородного уравнения $y'' - 6y' + 25y = 0$. Получим уравнение:

$k^2 - 6k + 25 = 0$;

$k_1 = 3 - 4i, k_2 = 3 + 4i.$

Общее решение однородного уравнения получим в виде:

$y = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$.

Составим частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения $f(x)$ представляет собой функцию $25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x)$. Следовательно $\tilde{y} = Ax + B + Ce^{-5x}\sin 8x + De^{-5x}\cos 8x$, где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты, которые находим, подставляя $\tilde{y} = Ax + B + Ce^{-5x}\sin 8x + De^{-5x}\cos 8x$ в исходное уравнение. Для этого найдем $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$.

$\tilde{y}' = A - 5Ce^{-5x}\sin 8x + 8Ce^{-5x}\cos 8x - 5De^{-5x}\cos 8x - 8De^{-5x}\sin 8x$;

$$\tilde{y}'' = 25Ce^{-5x}\sin 8x - 40Ce^{-5x}\cos 8x - 40Ce^{-5x}\cos 8x - 64Ce^{-5x}\sin 8x + 25De^{-5x}\cos 8x +$$
$$+ 40De^{-5x}\sin 8x + 40De^{-5x}\sin 8x - 64De^{-5x}\cos 8x =$$
$$= -39Ce^{-5x}\sin 8x - 80Ce^{-5x}\cos 8x - 39De^{-5x}\cos 8x + 80De^{-5x}\sin 8x;$$

$$-39Ce^{-5x}\sin 8x - 80Ce^{-5x}\cos 8x - 39De^{-5x}\cos 8x + 80De^{-5x}\sin 8x -$$
$$-6(A - 5Ce^{-5x}\sin 8x + 8Ce^{-5x}\cos 8x - 5De^{-5x}\cos 8x - 8De^{-5x}\sin 8x) +$$
$$25(Ax + B + Ce^{-5x}\sin 8x + De^{-5x}\cos 8x) = 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x);$$

$$-39Ce^{-5x}\sin 8x - 80Ce^{-5x}\cos 8x - 39De^{-5x}\cos 8x + 80De^{-5x}\sin 8x -$$
$$-6A + 30Ce^{-5x}\sin 8x - 48Ce^{-5x}\cos 8x + 30De^{-5x}\cos 8x + 48De^{-5x}\sin 8x +$$
$$+ 25Ax + 25B + 25Ce^{-5x}\sin 8x + 25De^{-5x}\cos 8x = 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x);$$

$$16Ce^{-5x}\sin 8x - 128Ce^{-5x}\cos 8x + 16De^{-5x}\cos 8x + 128De^{-5x}\sin 8x + 25Ax + 25B - 6A =$$
$$= 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x);$$

$$25Ax - 6A + 25B + (16C + 128D)e^{-5x}\sin 8x + (-128C + 16D)e^{-5x}\cos 8x =$$
$$= 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x);$$

$$\begin{cases} 25A = 25; \\ -6A + 25B = 94; \\ 16C + 128D = 130; \\ -128C + 16D = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1; \\ B = 4; \\ D = 1; \\ C = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Следовательно, $\tilde{y} = x + 4 + \frac{1}{8}e^{-5x}\sin 8x + e^{-5x}\cos 8x$.

Так как $y = y_{oo} + \tilde{y}$, то общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид $y = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x + x + 4 + \frac{1}{8}e^{-5x}\sin 8x + e^{-5x}\cos 8x$.

Выполним проверку. Для этого найдем y', y'' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y' = 3c_1 e^{3x}\cos 4x - 4c_1 e^{3x}\sin 4x + 3c_2 e^{3x}\sin 4x + 4c_2 e^{3x}\cos 4x + 1 - \frac{5}{8}e^{-5x}\sin 8x +$$
$$+ e^{-5x}\cos 8x - 5e^{-5x}\cos 8x - 8e^{-5x}\sin 8x;$$
$$y'' = 9c_1 e^{3x}\cos 4x - 12c_1 e^{3x}\sin 4x - 12c_1 e^{3x}\sin 4x - 16c_1 e^{3x}\cos 4x + 9c_2 e^{3x}\sin 4x + 12c_2 e^{3x}\cos 4x +$$
$$+ 12c_2 e^{3x}\cos 4x - 16c_2 e^{3x}\sin 4x + \frac{25}{8}e^{-5x}\sin 8x - 5e^{-5x}\cos 8x - 5e^{-5x}\cos 8x - 8e^{-5x}\sin 8x +$$
$$+ 25e^{-5x}\cos 8x + 40e^{-5x}\sin 8x + 40e^{-5x}\sin 8x - 64e^{-5x}\cos 8x =$$
$$= -7c_1 e^{3x}\cos 4x - 24c_1 e^{3x}\sin 4x - 7c_2 e^{3x}\sin 4x + 24c_2 e^{3x}\cos 4x +$$
$$+ \frac{25}{8}e^{-5x}\sin 8x - 49e^{-5x}\cos 8x + 72e^{-5x}\sin 8x;$$

$$-7c_1 e^{3x}\cos 4x - 24c_1 e^{3x}\sin 4x - 7c_2 e^{3x}\sin 4x + 24c_2 e^{3x}\cos 4x + \frac{25}{8}e^{-5x}\sin 8x - 49e^{-5x}\cos 8x +$$
$$+ 72e^{-5x}\sin 8x - 6(3c_1 e^{3x}\cos 4x - 4c_1 e^{3x}\sin 4x + 3c_2 e^{3x}\sin 4x + 4c_2 e^{3x}\cos 4x + 1 - \frac{5}{8}e^{-5x}\sin 8x +$$
$$+ e^{-5x}\cos 8x - 5e^{-5x}\cos 8x - 8e^{-5x}\sin 8x) + 25(c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x + x + 4 + \frac{1}{8}e^{-5x}\sin 8x +$$
$$+ e^{-5x}\cos 8x) = 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x);$$

$$-7c_1 e^{3x}\cos 4x - 24c_1 e^{3x}\sin 4x - 7c_2 e^{3x}\sin 4x + 24c_2 e^{3x}\cos 4x + \frac{25}{8}e^{-5x}\sin 8x - 49e^{-5x}\cos 8x +$$
$$+ 72e^{-5x}\sin 8x - 18c_1 e^{3x}\cos 4x + 24c_1 e^{3x}\sin 4x - 18c_2 e^{3x}\sin 4x - 24c_2 e^{3x}\cos 4x - 6 + \frac{15}{4}e^{-5x}\sin 8x -$$
$$- 6e^{-5x}\cos 8x + 30e^{-5x}\cos 8x + 48e^{-5x}\sin 8x + 25c_1 e^{3x}\cos 4x + 25c_2 e^{3x}\sin 4x + 25x + 100 +$$
$$+ \frac{25}{8}e^{-5x}\sin 8x + 25e^{-5x}\cos 8x = 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x);$$

$$130e^{-5x}\sin 8x + 25x + 94 = 25x + 94 + 130e^{-5x}\sin(8x).$$

Равенство верно.

Ответ: $y = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x + x + 4 + \frac{1}{8}e^{-5x}\sin 8x + e^{-5x}\cos 8x$.

Задание 23.

Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов. Выполнить проверку.

$y'' + 10y' + 34y = e^{-5x}\sin(3x)$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение однородного уравнения $y'' + 10y' + 34y = 0$. Получим уравнение:

$k^2 + 10k + 34 = 0$;

$k_1 = -5 - 3i, k_2 = -5 + 3i.$

Общее решение однородного уравнения получим в виде:

$y = c_1 e^{-5x}\cos 3x + c_2 e^{-5x}\sin 3x$.

Составим частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения $f(x)$ представляет собой функцию $e^{-5x}\sin(3x)$. Следовательно $\tilde{y} = x(Ae^{-5x}\sin 3x + Be^{-5x}\cos 3x)$, где A, B – неопределенные коэффициенты, которые находим, подставляя $\tilde{y} = x(Ae^{-5x}\sin 3x + Be^{-5x}\cos 3x)$ в исходное уравнение. Для этого найдем $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$.

$$\tilde{y}' = (Ae^{-5x}\sin 3x + Be^{-5x}\cos 3x) + x(-5Ae^{-5x}\sin 3x + 3Ae^{-5x}\cos 3x - 5Be^{-5x}\cos 3x - 3Be^{-5x}\sin 3x) =$$
$$= e^{-5x}\sin 3x(A - 5Ax - 3Bx) + e^{-5x}\cos 3x(B + 3Ax - 5Bx) =$$
$$= e^{-5x}(A\sin 3x - 5Ax\sin 3x - 3Bx\sin 3x + B\cos 3xB + 3Ax\cos 3x - 5Bx\cos 3x);$$

$$\tilde{y}'' = -5e^{-5x}(\sin 3x(A - 5Ax - 3Bx) + \cos 3x(B + 3Ax - 5Bx)) + e^{-5x}(3\cos 3x(A - 5Ax - 3Bx) +$$
$$+ \sin 3x(-5A - 3B) - 3\sin 3x(B + 3Ax - 5Bx) + \cos 3x(3A - 5B)) =$$
$$= e^{-5x}(-5A\sin 3x + 25Ax\sin 3x + 15Bx\sin 3x - 5B\cos 3x - 15Ax\cos 3x + 25Bx\cos 3x +$$
$$+ 3A\cos 3x - 15Ax\cos 3x - 9Bx\cos 3x - 5A\sin 3x - 3B\sin 3x - 3B\sin 3x - 9Ax\sin 3x + 15Bx\sin 3x +$$
$$+ 3A\cos 3x - 5B\cos 3x) =$$
$$= e^{-5x}(-10A\sin 3x + 16Ax\sin 3x + 30Bx\sin 3x - 10B\cos 3x - 30Ax\cos 3x + 16Bx\cos 3x +$$
$$+ 6A\cos 3x - 6B\sin 3x)$$

$$e^{-5x}(-10A\sin 3x + 16Ax\sin 3x + 30Bx\sin 3x - 10B\cos 3x - 30Ax\cos 3x + 16Bx\cos 3x +$$
$$+ 6A\cos 3x - 6B\sin 3x) + 10e^{-5x}(A\sin 3x - 5Ax\sin 3x - 3Bx\sin 3x + B\cos 3xB + 3Ax\cos 3x -$$
$$- 5Bx\cos 3x) + 34e^{-5x}(Ax\sin 3x + Bx\cos 3x)y = e^{-5x}\sin(3x);$$
$$e^{-5x}(-10A\sin 3x + 16Ax\sin 3x + 30Bx\sin 3x - 10B\cos 3x - 30Ax\cos 3x + 16Bx\cos 3x +$$
$$+ 6A\cos 3x - 6B\sin 3x + 10A\sin 3x - 50Ax\sin 3x - 30Bx\sin 3x + 10B\cos 3x + 30Ax\cos 3x -$$
$$- 50Bx\cos 3x + 34Ax\sin 3x + 34Bx\cos 3x) = e^{-5x}\sin(3x);$$
$$e^{-5x}(6A\cos 3x - 6B\sin 3x) = e^{-5x}\sin(3x);$$

$$\begin{cases} 6A = 0; \\ -6B = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0; \\ B = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Следовательно, $\tilde{y}=-\frac{1}{6}xe^{-5x}\cos 3x$.

Так как $y=y_{oo}+\tilde{y}$, то общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид $y=c_1e^{-5x}\cos 3x+c_2e^{-5x}\sin 3x-\frac{1}{6}xe^{-5x}\cos 3x$.

Выполним проверку. Для этого найдем y', y'' и подставим найденные значения в заданное уравнение:

$$y'=-5c_1e^{-5x}\cos 3x-3c_1e^{-5x}\sin 3x-5c_2e^{-5x}\sin 3x+3c_2e^{-5x}\cos 3x-\frac{1}{6}e^{-5x}\cos 3x-$$

$$-\frac{1}{6}x(-5e^{-5x}\cos 3x-3e^{-5x}\sin 3x)=-5c_1e^{-5x}\cos 3x-3c_1e^{-5x}\sin 3x-5c_2e^{-5x}\sin 3x+$$

$$+3c_2e^{-5x}\cos 3x-\frac{1}{6}e^{-5x}\cos 3x+\frac{5}{6}xe^{-5x}\cos 3x+\frac{1}{2}xe^{-5x}\sin 3x;$$

$$y''=25c_1e^{-5x}\cos 3x+15c_1e^{-5x}\sin 3x+15c_1e^{-5x}\sin 3x-9c_1e^{-5x}\cos 3x+25c_2e^{-5x}\sin 3x-$$

$$-15c_2e^{-5x}\cos 3x-15c_2e^{-5x}\cos 3x-9c_2e^{-5x}\sin 3x+\frac{5}{6}e^{-5x}\cos 3x+\frac{1}{2}e^{-5x}\sin 3x+$$

$$+\frac{5}{6}e^{-5x}\cos 3x+\frac{5}{6}x(-5e^{-5x}\cos 3x-3e^{-5x}\sin 3x)+\frac{1}{2}e^{-5x}\sin 3x+\frac{1}{2}x(-5e^{-5x}\sin 3x+3e^{-5x}\cos 3x)=$$

$$=16c_1e^{-5x}\cos 3x+30c_1e^{-5x}\sin 3x+16c_2e^{-5x}\sin 3x-30c_2e^{-5x}\cos 3x+\frac{5}{3}e^{-5x}\cos 3x+e^{-5x}\sin 3x+$$

$$-\frac{8}{3}xe^{-5x}\cos 3x-5xe^{-5x}\sin 3x.$$

$$16c_1e^{-5x}\cos 3x+30c_1e^{-5x}\sin 3x+16c_2e^{-5x}\sin 3x-30c_2e^{-5x}\cos 3x+\frac{5}{3}e^{-5x}\cos 3x+e^{-5x}\sin 3x+$$

$$-\frac{8}{3}xe^{-5x}\cos 3x-5xe^{-5x}\sin 3x+10(-5c_1e^{-5x}\cos 3x-3c_1e^{-5x}\sin 3x-5c_2e^{-5x}\sin 3x+$$

$$+3c_2e^{-5x}\cos 3x-\frac{1}{6}e^{-5x}\cos 3x+\frac{5}{6}xe^{-5x}\cos 3x+\frac{1}{2}xe^{-5x}\sin 3x)+$$

$$+34(c_1e^{-5x}\cos 3x+c_2e^{-5x}\sin 3x-\frac{1}{6}xe^{-5x}\cos 3x)=e^{-5x}\sin(3x);$$

$$16c_1e^{-5x}\cos 3x+30c_1e^{-5x}\sin 3x+16c_2e^{-5x}\sin 3x-30c_2e^{-5x}\cos 3x+\frac{5}{3}e^{-5x}\cos 3x+e^{-5x}\sin 3x+$$

$$-\frac{8}{3}xe^{-5x}\cos 3x-5xe^{-5x}\sin 3x-50c_1e^{-5x}\cos 3x-30c_1e^{-5x}\sin 3x-50c_2e^{-5x}\sin 3x+$$

$$+30c_2e^{-5x}\cos 3x-\frac{5}{3}e^{-5x}\cos 3x+\frac{25}{3}xe^{-5x}\cos 3x+5xe^{-5x}\sin 3x+$$

$$+34c_1e^{-5x}\cos 3x+34c_2e^{-5x}\sin 3x-\frac{17}{3}xe^{-5x}\cos 3x=e^{-5x}\sin(3x);$$

$$e^{-5x}\sin 3x=e^{-5x}\sin(3x).$$

Равенство верно.

Ответ: $y=c_1e^{-5x}\cos 3x+c_2e^{-5x}\sin 3x-\frac{1}{6}xe^{-5x}\cos 3x$.