Типовой расчет по дифференциальным уравнениям
Вариант 4

Задача 1. $y'-\left(x^2+3\right)e^{-5y}=0$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$y'-\left(x^2+3\right)e^{-5y}=0$

$\frac{dy}{dx}=\left(x^2+3\right)e^{-5y},$

$e^{5y}dy=\left(x^2+3\right)dx.$

Интегрируем обе части уравнения:

$\int e^{5y}dy=\int\left(x^2+3\right)dx,$

$\frac{1}{5}e^{5y}=\frac{1}{3}x^3+3x+C,$

$\frac{1}{5}e^{5y}-\frac{1}{3}x^3-3x=C.$

Нашли общий интеграл уравнения: $\frac{1}{5}e^{5y}-\frac{1}{3}x^3-3x=C.$

Задача 2. $xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y$

Решение. Это однородное уравнение первого порядка. Введем подстановку:

$y=ux;\ y'=u'x+u;\quad dy=xdu+u$, тогда $x(xdu+u)=4\sqrt{2x^2+u^2x^2}+ux$.

$x^2du+ux=4\sqrt{x^2(2+u^2)}+ux$. Разделим уравнение на $x\neq 0$ и вычтем из обеих частей u:

$xdu=4\sqrt{2+u^2}$ или $x\frac{du}{dx}=4\sqrt{2+u^2}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{du}{\sqrt{2+u^2}}=4\frac{dx}{x}.$

Проинтегрируем уравнение и получим: $\ln(u+\sqrt{2+u^2})=\ln x^4+\ln C$

(воспользовались табличными интегралами:

$\int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}=\ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right|+C;\quad \int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$))

Продолжаем преобразования:

$u+\sqrt{2+u^2}=Cx^4;$

т.к. $u=\dfrac{y}{x}$, то $\dfrac{y}{x}+\sqrt{2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=Cx^4$ - общий интеграл уравнения.

Задача 3. $y'-y\cos x=e^{2\sin x}\cos x$

Решение. Это линейное неоднородное уравнение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y'-y\cos x=0,$

$\dfrac{dy}{dx}=y\cos x,$

$\dfrac{dy}{y}=\cos xdx,$

$\int\dfrac{dy}{y}=\int\cos xdx,$

$\ln|y|=\sin x+\ln|C|,$

$y=Ce^{\sin x}.$

Общее решение исходного уравнения будем искать в виде: $y=C(x)e^{\sin x}$. Тогда производная равна $y'=C'(x)e^{\sin x}+\cos xC(x)e^{\sin x}$. Подставляем:

$C'(x)e^{\sin x}+\cos xC(x)e^{\sin x}-C(x)e^{\sin x}\cos x=e^{2\sin x}\cos x,$

$C'(x)=e^{2\sin x}\cos x,$

$C'(x)=\cos xe^{\sin x},$

$C(x)=\int\cos xe^{\sin x}dx=\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+A.$

Искомое общее решение имеет вид $y=\left(e^{\sin x}+A\right)e^{\sin x}=e^{2\sin x}+Ae^{\sin x}$.

Здесь A - произвольная постоянная.

Задача 4. $\ln ydx+\dfrac{x}{y}dy=ydy$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$\ln ydx+\dfrac{x}{y}dy=ydy,$

$(\ln y)dx+\left(\dfrac{x}{y}-y\right)dy=0.$

Так как

$\frac{\partial}{\partial y}(\ln y)=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}-y\right)=\frac{1}{y}$,

то это уравнение в полных дифференциалах, то есть существует такая функция $U(x,y)$, что $\frac{\partial U}{\partial x}=(\ln y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}-y\right)$. (*)

Восстановим эту функцию по известным производным.

$U(x,y)=\int\frac{\partial U}{\partial x}dx=\int(\ln y)dx=x\ln y+\varphi(y)$.

Теперь возьмем частную производную по y и приравняем к второму уравнению в (*):

$\frac{\partial U}{\partial y}=x\frac{1}{y}+\varphi'(y)=\frac{x}{y}-y,$

$\varphi'(y)=-y,$

$\varphi(y)=-\int ydy=-\frac{1}{2}y^2+C.$

Получили, что

$U(x,y)=x\ln y-\frac{1}{2}y^2+C.$

Тогда общий интеграл уравнения: $x\ln y-\frac{1}{2}y^2=C$.

Задача 5. $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$

$(3x^2+3x^2\ln y)dx+\left(\frac{x^3}{y}-2y\right)dy=0.$

Так как

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+3x^2\ln y)=\frac{3x^2}{y}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{y}-2y\right)=\frac{3x^2}{y}$,

то это уравнение в полных дифференциалах, то есть существует такая функция $U(x,y)$, что $\frac{\partial U}{\partial x}=(3x^2+3x^2\ln y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{x^3}{y}-2y\right)$. (*)

Восстановим эту функцию по известным производным.

$U(x,y)=\int\frac{\partial U}{\partial x}dx=\int(3x^2+3x^2\ln y)dx=x^3+x^3\ln y+\varphi(y)$.

Теперь возьмем частную производную по y и приравняем к второму уравнению в (*):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 \frac{1}{y} + \varphi'(y) = \frac{x^3}{y} - 2y,$$

$$\varphi'(y) = -2y,$$

$$\varphi(y) = -\int 2y dy = -y^2 + C.$$

Получили, что

$$U(x, y) = x^3 + x^3 \ln y - y^2 + C.$$

Тогда общий интеграл уравнения: $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C$.