Решение контрольной работы
Производная функции и ее применение

Задача 1. Найти производные функций:

а) $y=e^{\sin^4 2x}$

Решение.

$$y'=\left(e^{\sin^4 2x}\right)'=e^{\sin^4 2x}\left(\sin^4 2x\right)'=e^{\sin^4 2x}4\sin^3 2x\left(\sin 2x\right)'=4e^{\sin^4 2x}\sin^3 2x\cdot\cos 2x\left(2x\right)'=$$

$$=8e^{\sin^4 2x}\sin^3 2x\cdot\cos 2x.$$

б) $y=\left(x^4+1\right)^5\cdot\cos e^{-x^3}$

Решение.

$$y'=\left(\left(x^4+1\right)^5\cdot\cos e^{-x^3}\right)'=\left(\left(x^4+1\right)^5\right)'\cdot\cos e^{-x^3}+\left(x^4+1\right)^5\cdot\left(\cos e^{-x^3}\right)'=$$

$$=5\left(x^4+1\right)^4\left(x^4+1\right)'\cdot\cos e^{-x^3}-\left(x^4+1\right)^5\cdot\sin e^{-x^3}\left(e^{-x^3}\right)'=$$

$$=5\left(x^4+1\right)^4 4x^3\cdot\cos e^{-x^3}-\left(x^4+1\right)^5\cdot\sin e^{-x^3}\cdot e^{-x^3}\left(-3x^2\right)=$$

$$=20\left(x^4+1\right)^4\cdot x^3\cdot\cos e^{-x^3}+3x^2\left(x^4+1\right)^5\cdot\sin e^{-x^3}\cdot e^{-x^3}.$$

в) $y=\dfrac{1+\ln 4x}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

Решение.

$$y'=\left(\frac{1+\ln 4x}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\right)'=\frac{(1+\ln 4x)'\operatorname{arctg}\sqrt{x}-(1+\ln 4x)\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{4}{4x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-(1+\ln 4x)\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-(1+\ln 4x)\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2}.$$

г) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$,

Решение.

$$y'=\left(\sqrt{\sin\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

д) $y=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$.

Решение.

$$y'=\left(\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\right)'=\frac{1}{\frac{1}{x}-x}\left(\frac{1}{x}-x\right)'=\frac{x}{1-x^2}\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)=$$

$$=-\frac{x}{1-x^2}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)=-\frac{x\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1-x^2\right)}=-\frac{\left(1+x^2\right)}{x\left(1-x^2\right)}.$$

Задача 2. Найти $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)'}{\left(\operatorname{arctg} t\right)'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}2t}{\frac{1}{1+t^2}}=2t.$$

Ответ: $\frac{dy}{dx}=2t$.

Задача 3. Функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $x^2+3xy+2y^2-4x+y-5=0$. Найти производную этой функции в точке $M(2,1)$.

Решение. Берем производную от правой и левой части и выражаем y'. Получаем:

$$\left(x^2+3xy+2y^2-4x+y-5\right)'=0',$$

$$2x+3y+3xy'+4yy'-4+y'=0,$$

$$y'(3x+4y+1)=4-2x-3y,$$

$$y'=\frac{4-2x-3y}{3x+4y+1}.$$

Подставляем

$$y'(2,1)=\frac{4-4-3}{6+4+1}=\frac{-3}{11}.$$

Ответ: $-\frac{3}{11}$.

Задача 4. Найти производную показательно-степенной функции.

$$y=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x$$

Решение.
Производную показательно-степенной функции найдем по формуле:

$(u^v)'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'$**,** где $u=\dfrac{x}{1+x^2}$, $v=x$.

$$y'=\left(\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x\cdot\ln\frac{x}{1+x^2}\cdot x'+x\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=$$

$$=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x\cdot\ln\frac{x}{1+x^2}+x\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{x-1}\cdot\frac{x'\cdot(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x\cdot\ln\frac{x}{1+x^2}+x\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{x-1}\cdot\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x\cdot\ln\frac{x}{1+x^2}+x\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{x-1}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^x\cdot\left(\ln\frac{x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Ответ. $y'=\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^x\cdot\left(\ln\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Задача 5. Найти производную пятого порядка $y=\dfrac{1}{2-3x}$

Решение. Вычисляем последовательно производные:

$$y'=\left(\frac{1}{2-3x}\right)'=-\frac{1}{(2-3x)^2}(2-3x)'=\frac{3}{(2-3x)^2},$$

$$y''=\left(\frac{3}{(2-3x)^2}\right)'=-2\frac{3}{(2-3x)^3}(2-3x)'=\frac{18}{(2-3x)^3},$$

$$y'''=\left(\frac{18}{(2-3x)^3}\right)'=-3\frac{18}{(2-3x)^4}(2-3x)'=\frac{162}{(2-3x)^4},$$

$$y^{(4)}=\left(\frac{162}{(2-3x)^4}\right)'=-4\frac{162}{(2-3x)^5}(2-3x)'=\frac{1944}{(2-3x)^5},$$

$$y^{(5)}=\left(\frac{1944}{(2-3x)^5}\right)'=-5\frac{1944}{(2-3x)^6}(2-3x)'=\frac{29160}{(2-3x)^6}.$$

Ответ: $y^{(5)}=\dfrac{29160}{(2-3x)^6}$.

Задача 6. Найти производную $\dfrac{dx}{dy}$ обратной функции: $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

Решение. Найдем сначала производную $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)'=\frac{2x\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2+4\right)^2}=2x\frac{x^2+4-x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Тогда производная обратной функции равна:

$$x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{\left(x^2+4\right)^2}{16x}.$$

Ответ: $x'=\dfrac{\left(x^2+4\right)^2}{16x}$.

Задача 7. Дана функция $y=2\sqrt{x}-x$. Найдите ее наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке $[0;4]$.

Решение. Функция определена и непрерывна на отрезке $[0;4]$, наибольшее или наименьшее значения она может достигать на концах отрезка или в точке экстремума.
Найдем значение функции на концах отрезка и в стационарных точках, принадлежащих отрезку.

1) Значения функции на концах отрезка:

$y(0)=0-0=0$;

$y(4)=2\sqrt{4}-4=4-4=0$.

2) Найдем стационарные точки.

$$y'(x)=\left(2\sqrt{x}-x\right)'=2\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Критические точки: $x=0,\ x=1$.

Вычисляем значение в $x=1\in[0;4]$

$y(1)=2\sqrt{1}-1=2-1=1$

Наименьшее значение функции - 0 наибольшее - 1.

Задача 8. Для следующих функций провести их полное исследование средствами дифференциального исчисления и построить их графики:

$$y=\frac{x^2+4x+8}{x+3}$$

Решение.

1) Область определения функции $x \neq -3$, то есть $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$. Точка разрыва $x=-3$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{x^2+4x+8}{x+3}=\frac{9-12+8}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-3+0}\frac{x^2+4x+8}{x+3}=\frac{9-12+8}{+0}=+\infty,$$

Получаем, что $x=-3$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=\dfrac{x^2+4x+8}{x+3}=0$, нет точек.

Oy: $x=0$, $\Rightarrow y=\dfrac{8}{3}\approx 2,67$, точка (0, 2,67).

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^2+4(-x)+8}{-x+3}=-\frac{x^2-4x+8}{x-3}\neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{x^2+4x+8}{x+3}\right)'=\frac{(2x+4)(x+3)-(x^2+4x+8)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x+4x+12-x^2-4x-8}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}=0,$$

Находим критические точки: $x_1=-3,\ x_2=-3+\sqrt{5}\approx-0,76,\ x_3=-3-\sqrt{5}\approx-5,24$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

y'	+		–		–		+
y	↗	-5,24	↘	-3	↘	0,76	↗

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-5,24),(0,76;+\infty)$, убывает на интервалах $(-5,24;-3),(-3;0,76)$. Функция имеет максимум в точке $x_3=-3-\sqrt{5}\approx-5,24$, $f(-5,24)\approx-6,47$. Функция имеем минимум в точке $x_2=-3+\sqrt{5}\approx-0,76$, $f(-0,76)\approx 2,47$

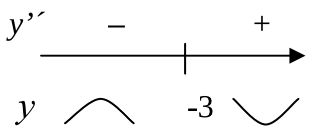
5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}\right)'=\frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x+4)2(x+3)}{(x+3)^4}=$$

$$=\frac{(2x+6)(x+3)-2(x^2+6x+4)}{(x+3)^3}=\frac{2x^2+6x+6x+18-2x^2-12x-8}{(x+3)^3}=,$$

$$=\frac{10}{(x+3)^3}.$$

Приравниваем к нулю и находим критическую точку: $x=-3$.
Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(-3;+\infty)$, выпукла вверх на интервале $(-\infty;-3)$.

6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

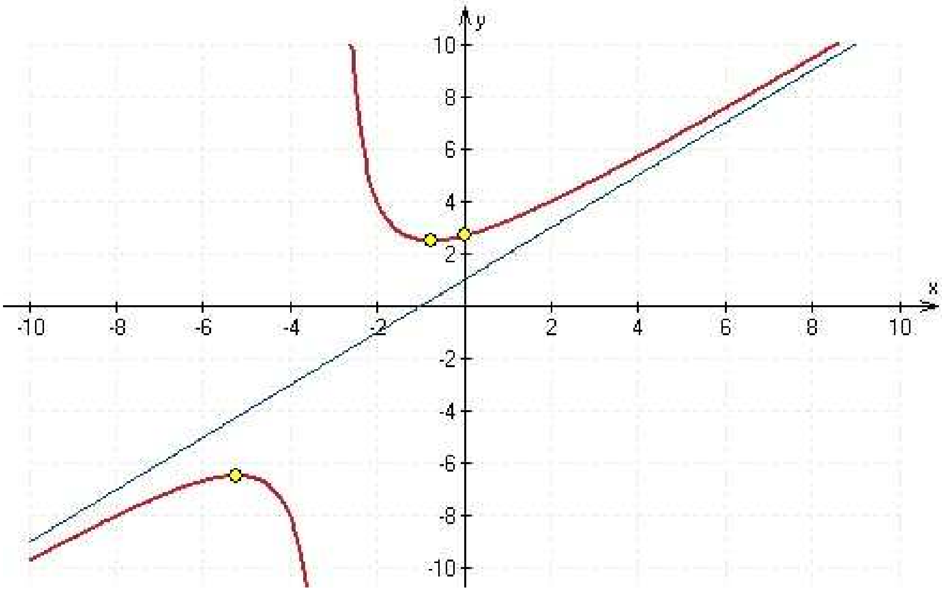
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+8}{(x+3)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4/x+8/}{1+3/x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+8}{(x+3)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+8-x^2-3x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+8}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+8/x}{1+3/x}=1$$

Наклонная асимптота $y=x+1$.

7) Строим график функции



Задача 9. Найти координаты точки пересечения с осью *Oy* касательной, проведенной к графику функции *y=f(x)* в заданной точке. Сделать рисунок.

$$y = \arcsin x, \qquad A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Сначала найдем уравнение касательной, проведенной в заданной точке. Уравнение касательной в точке $(x_0, y(x_0))$ имеет вид:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем значение функции: $y\left(\sqrt{3}/2\right) = \arcsin\left(\sqrt{3}/2\right) = \pi/3$.

Найдем производную:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В точке $x = \sqrt{3}/2$ получаем: $y'\left(\sqrt{3}/2\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}/2\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-3/4}} = \dfrac{1}{\sqrt{1/4}} = 2.$.

Подставляем все в уравнение и получаем уравнение касательной:

$$y = \frac{\pi}{3} + 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

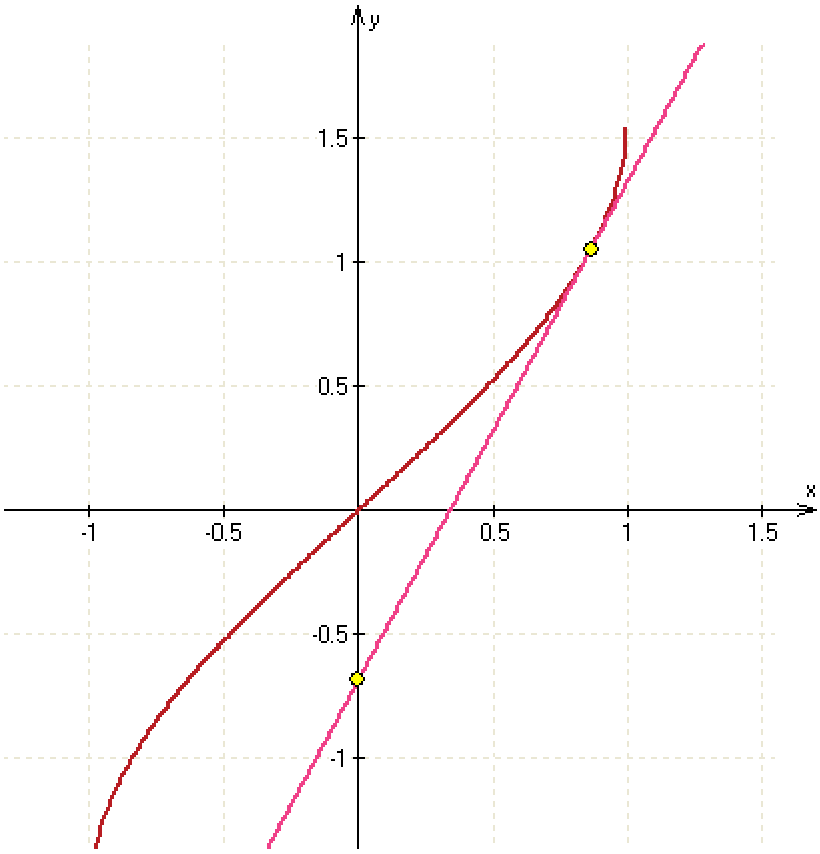
$$y = 2x - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

Данная касательная пересекает ось Oy в точке, для которой $x = 0$, откуда:

$y(0) = 0 - \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3} \approx -0,685.$

Точка $B\left(0; -\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Сделаем чертеж:



Красным $y = \arcsin x$, розовым касательная. Помечена точка касания и точка пересечения касательной с осью ординат.

Задача 10. Каковы радиус основания R и высота H открытого цилиндрического бака данного объема V, что бы на его изготовление пошло наименьшее количество листового материала?

Решение. Пусть радиус основания цилиндра (бака) равен R, высота цилиндра (бака) равна H, тогда они связаны соотношением $V = \pi R^2 H$, откуда можно выразить $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$.
Количество листового материала, которое уйдет на изготовление ведра равно площади поверхности бака, то есть площади основания и боковой поверхности:

$S = \pi R^2 + 2\pi RH = \pi R^2 + 2\pi R \dfrac{V}{\pi R^2} = \pi R^2 + \dfrac{2V}{R}$, эту функцию нужно минимизировать.

Вычисляем производную и приравниваем к нулю:

$$S'=\left(\pi R^2+\frac{2V}{R}\right)'=2\pi R-\frac{2V}{R^2}=\frac{2\pi R^3-2V}{R^2}=\frac{2\pi(R^3-V/\pi)}{R^2}=0,$$

Отсюда $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Проверим, что это точка минимума. Рассмотрим знаки первой производной. В интервале $\left(0;\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$ производная отрицательна, в интервале $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}};+\infty\right)$ производная положительна, значит, $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ - точка минимума.

Найдем высоту бака:

$$H=\frac{V}{\pi R^2}=\frac{V\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Таким образом, искомые размеры бака:

$$R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\ H=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Задача 11. Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u=-\frac{5}{6}t^3+10t^2+50t+50$ (ед.), $1\le t\le 8$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда равна:

$p=\frac{u}{t}=-\frac{5}{6}t^2+10t+50+\frac{50}{t}$ - количество произведенной продукции за единицу времени.

Через час после начала работы: $p(2)=-\frac{5}{6}4+20+50+\frac{50}{2}=\frac{275}{3}\approx 91,667$

За час до окончания работы: $p(7)=-\frac{5}{6}49+70+50+\frac{50}{7}=\frac{3625}{42}\approx 83,31$

Найдем скорость изменения производительности – ее производную:

$$p'=\left(-\frac{5}{6}t^2+10t+50+\frac{50}{t}\right)'=-\frac{5}{3}t+10-\frac{50}{t^2}.$$

Через час после начала работы: $p'(2)=-\frac{5}{3}2+10-\frac{50}{4}=-\frac{35}{6}\approx -5,833$

За час до окончания работы: $p'(7)=-\frac{5}{3}7+10-\frac{50}{49}=-\frac{395}{147}\approx -2,69$

Найдем темп изменения производительности:

$$T_p=(\ln p)'=\frac{p'}{p}=\frac{-\frac{5}{3}t+10-\frac{50}{t^2}}{-\frac{5}{6}t^2+10t+50+\frac{50}{t}}.$$

Через час после начала работы:

$$T(2)=\frac{-\frac{5}{3}2+10-\frac{50}{4}}{-\frac{5}{6}4+20+50+\frac{50}{2}}=-\frac{7}{110}\approx -0,064$$

За час до окончания работы:

$$T(7)=\frac{-\frac{5}{3}7+10-\frac{50}{49}}{-\frac{5}{6}49+70+50+\frac{50}{7}}=-\frac{158}{5075}\approx -0,031$$

Задача 12. Опытным путем установлены функции спроса $q=\frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s=p+0,5$, где q и s - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p - цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 10% от равновесной.

Решение:

а) Определим равновесную спроса из соотношения:

$$\frac{p+8}{p+2}=p+0,5,$$

$$p+8=(p+0,5)(p+2),$$

$$p^2+1,5p-7=0,$$

$$p=2.$$

б) Определим эластичность спроса по формуле:

$$E_p(q)=q'\frac{p}{q}=\left(\frac{p+8}{p+2}\right)'\frac{p}{\left(\frac{p+8}{p+2}\right)}=\frac{p+2-p-8}{(p+2)^2}\frac{p(p+2)}{(p+8)}=\frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

Определим эластичность предложения по формуле:

$$E_p(s)=s'\frac{p}{s}=(p+0,5)'\frac{p}{(p+0,5)}=\frac{p}{(p+0,5)}.$$

При равновесной цене получаем:

$$E_p(q)=\frac{-12}{(2+2)(2+8)}=\frac{-12}{40}=-0,3.$$

$$E_p(s) = \frac{2}{(2+0,5)} = \frac{2}{2,5} = 0,8 .$$

в) Найдем эластичность дохода по цене:

$$E_p(I) = 1 - \left|E_p(q)\right| = 1 - \frac{6p}{(p+2)(p+8)}.$$

При равновесной цене: $E_p(I) = 1 - 0,3 = 0,7$.

То есть, при изменении равновесной цены на 10% доход изменится на 7%.