МГАПИ
Задание на домашнюю работу по высшей математике, часть 1
Раздел «Дифференцирование функций одной переменной»
Вариант 7

Найти производные функции:

1. $y = 2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}}$

Решение. Вычисляем как производную сложной функции:

$$y' = \left(2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}}\right)' = 2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}} \ln 2 \left(\sin^4 \frac{x}{x+3}\right)' = 2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}} \ln 2 \cdot 4\sin^3 \frac{x}{x+3}\left(\sin \frac{x}{x+3}\right)' =$$

$$= 2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}} \ln 2 \cdot 4\sin^3 \frac{x}{x+3} \cos \frac{x}{x+3}\left(\frac{x}{x+3}\right)' = 2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}} \ln 2 \cdot 4\sin^3 \frac{x}{x+3} \cos \frac{x}{x+3} \cdot \frac{1(x+3)-x}{(x+3)^2} =$$

$$= 2^{\sin^4 \frac{x}{x+3}} \ln 2 \cdot 4\sin^3 \frac{x}{x+3} \cos \frac{x}{x+3} \cdot \frac{3}{(x+3)^2}.$$

2. $y = \mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right) \cdot \arccos e^{-2x^3}$

Решение. Используем правило дифференцирования произведения и сложной функции.

$$y' = \left(\mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot \arccos e^{-2x^3}\right)' = \left(\mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\right)'\cdot \arccos e^{-2x^3} + \mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot\left(\arccos e^{-2x^3}\right)' =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\left(\mathrm{tg}\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\right)'\cdot \arccos e^{-2x^3} + \mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+\left(e^{-2x^3}\right)^2}}\left(e^{-2x^3}\right)' =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\frac{1}{\cos^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)}\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)'\cdot \arccos e^{-2x^3} + \mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot\frac{-e^{-2x^3}}{\sqrt{1+e^{-4x^3}}}\left(-2x^3\right)' =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tg}\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)}{\cos^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)}\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}\right)\left(x^2+1\right)'\cdot \arccos e^{-2x^3} + \mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot\frac{-e^{-2x^3}}{\sqrt{1+e^{-4x^3}}}\left(-6x^2\right) =$$

$$= \frac{8x\,\mathrm{tg}\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}\cos^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)}\cdot \arccos e^{-2x^3} + \mathrm{tg}^2\left(2\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot\frac{6x^2e^{-2x^3}}{\sqrt{1+e^{-4x^3}}}.$$

3. $y = \dfrac{\cos^2 3x^5}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2 4x+7}}$

Решение. Используем правило дифференцирования частного и сложной функции.

$$y'=\left(\frac{\cos^2 3x^5}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}}\right)'=\frac{\left(\cos^2 3x^5\right)'\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}-\left(\cos^2 3x^5\right)\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}\right)'}{\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cos 3x^5\left(\cos 3x^5\right)'\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}-\left(\cos^2 3x^5\right)\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}}\left(\operatorname{ctg}^2 4x+7\right)'}{\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cos 3x^5\left(-\sin 3x^5\right)\left(3x^5\right)'\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}-\left(\cos^2 3x^5\right)\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}}2\operatorname{ctg}4x\left(\operatorname{ctg}4x\right)'}{\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}\right)^2}=$$

$$=\frac{-2\cos 3x^5\sin 3x^5\left(13x^4\right)\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}-\left(\cos^2 3x^5\right)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}}\operatorname{ctg}4x\frac{-4}{\sin^2 4x}}{\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\sin 6x^5\cdot 13x^4\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}+4\frac{\cos^2 3x^5\cdot\operatorname{ctg}4x}{\sin^2 4x\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}}}{\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 4x+7}\right)^2}.$$

4. $y=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^{\ln\left(x^2+1\right)}$

Решение. Логарифмируем обе части:

$\ln y=\ln\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)$,

а теперь берем производную:

$$\frac{y'}{y}=\left(\ln\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\right)'=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+\ln\left(x^2+1\right)\cdot\left(\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\right)'=$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+\ln\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+\ln\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2x\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)}{x^2+1}+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x}\left(x+1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$$

Откуда получаем:

$$y' = y\left(\frac{2x\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)}{x^2+1} + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x}\,(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^{\ln\left(x^2+1\right)}\left(\frac{2x\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)}{x^2+1} + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x}\,(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\right).$$

5. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \operatorname{tg}^2 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

Решение. Сначала найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\left(\sin^3 t\right)'}{\left(\operatorname{tg}^2 t\right)'} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{2\operatorname{tg} t\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{3}{2}\frac{\sin^2 t\cos^3 t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{3}{2}\sin t\cos^4 t.$$

Теперь найдем вторую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{dx/dt} = \left(y'\right)_t'\frac{1}{x_t'} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\sin t\cos^4 t\right)'}{\left(\operatorname{tg}^2 t\right)'} = \frac{\frac{3}{2}\left(\cos t\cos^4 t - \sin t 4\cos^3 t\sin t\right)}{2\operatorname{tg} t\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{3\left(\cos^5 t - 4\sin^2 t\cos^3 t\right)}{4\operatorname{tg} t\frac{1}{\cos^2 t}} = .$$

$$= \frac{3\left(\cos^5 t - 4\sin^2 t\cos^3 t\right)\cos^3 t}{4\sin t} = \frac{3\left(\cos^2 t - 4\sin^2 t\right)\cos^6 t}{4\sin t}.$$

6. Составить уравнения касательной и нормаль к графику функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \operatorname{tg}^2 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид:

$$y = y(t_0) + y'(t_0)\left(x - x(t_0)\right).$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y = y(t_0) - \frac{1}{y'(t_0)}\left(x - x(t_0)\right)$$

Подставляем $t_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{8\sqrt{2}}.$$

Получаем касательную:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8\sqrt{2}}(x-1),$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8\sqrt{2}}x - \frac{3}{8\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{3}{8\sqrt{2}}x + \frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

Нормаль:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x-1),$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{8\sqrt{2}}{3}x + \frac{8\sqrt{2}}{3},$$

$$y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{8\sqrt{2}}{3},$$

$$y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + \frac{3\sqrt{2} + 32\sqrt{2}}{12},$$

$$y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + \frac{35\sqrt{2}}{12}.$$

7. Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2 + 2xy + 2y^2 + x + y - 2 = 0$. Найти y' и y'' функции в точке $M(1;0)$.

Решение. Берем производную от правой и левой части и выражаем y'. Получаем:

$$\left(x^2+2xy+2y^2+x+y-2\right)'=0',$$
$$2x+2y+2xy'+4yy'+1+y'=0,$$
$$y'\left(2x+4y+1\right)=-1-2x-2y,$$
$$y'=-\frac{1+2x+2y}{2x+4y+1}.$$

Подставляем $y'(1,0)=-\frac{1+2}{2+1}=-1.$

Теперь дифференцируем полученное соотношение еще раз и получаем y''.

$$y''=-\left(\frac{1+2x+2y}{2x+4y+1}\right)'=-\frac{(1+2x+2y)'(2x+4y+1)-(1+2x+2y)(2x+4y+1)'}{(2x+4y+1)^2}=$$
$$=-\frac{(2+2y')(2x+4y+1)-(1+2x+2y)(2+4y')}{(2x+4y+1)^2}=$$
$$=-\frac{2y'(2x+4y+1)-4y'(1+2x+2y)}{(2x+4y+1)^2}-\frac{2(2x+4y+1)-2(1+2x+2y)}{(2x+4y+1)^2}=$$
$$=-2y'\frac{(2x+4y+1)-2(1+2x+2y)}{(2x+4y+1)^2}-2\frac{(2x+4y+1)-(1+2x+2y)}{(2x+4y+1)^2}=$$
$$=-2y'\frac{2x+4y+1-2-4x-4y}{(2x+4y+1)^2}-2\frac{2x+4y+1-1-2x-2y}{(2x+4y+1)^2}=$$
$$=-2y'\frac{-2x-1}{(2x+4y+1)^2}-2\frac{2y}{(2x+4y+1)^2}=2\frac{1+2x+2y}{2x+4y+1}\frac{-2x-1}{(2x+4y+1)^2}-2\frac{2y}{(2x+4y+1)^2}.$$

Подставляем $M(1;0)$:

$$y''(1;0)=2\frac{1+2}{2+1}\frac{-2-1}{(2+1)^2}-2\frac{0}{(2+1)^2}=2\frac{-3}{9}-0=-\frac{2}{3}.$$

8. Функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $x^2+2xy+2y^2+x+y-2=0$. Составить уравнение касательной и нормали к графику этой функции в точке $M(1;0)$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид:
$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$.
Подставляем, используя данные предыдущей задачи:
$y=0-1(x-1)$,
$y=-x+1.$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y=y(x_0)-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0).$$

Подставляем:

$$y=0+1(x-1),$$

$$y=x-1.$$

9. Найти d^2y функции $y=x\ln(x^2+1)$.

Решение. Вычисляем первую и вторую производную:

$$y'=\left(x\ln(x^2+1)\right)'=1\ln(x^2+1)+x\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\ln(x^2+1)+x\frac{1}{x^2+1}2x=\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}.$$

$$y''=\left[\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right]'=\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'+\frac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3+4x-4x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+6x}{(x^2+1)^2}.$$

Тогда второй дифференциал это $d^2y=y''dx^2=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2+1)^2}dx^2$

Задача 10. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\sqrt{15,6}$.

Решение. Используем формулу:

$y(x)-y(x_0)\approx dy=y'(x_0)(x-x_0)$, откуда

$$y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0).$$

Получаем:

$x=15,6$, $x_0=16$,

$y=\sqrt{x}$, $y(16)=\sqrt{16}=4$,

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(16)=\dfrac{1}{2\sqrt{16}}=\dfrac{1}{8}$.

Подставляем все:

$$\sqrt{15,6}\approx 4+\frac{1}{8}(15,6-16)=4-\frac{1}{8}0,4=3,95.$$