Исследование операций в экономике
Контрольная работа №3

Вариант 58

Задача 08. Малое предприятие имеет два цеха - A и B. Каждому установлен месячный план выпуска продукции. Известно, что цех A свой план выполняет с вероятностью p_1. Вероятность выполнения плана цехом B при условии, что цех A выполнит свой план, равна p_2. Известно также, что с вероятностью p_3 может сложиться ситуация, когда ни один из цехов свой план не выполнит.
Если оба цеха выполнят свои планы в предстоящий месяц, то предприятие увеличит свой счет в банке на 5 единиц, если оба не выполнят – снимет со счета 4 единицы, если цех A выполнит, а цех B нет - увеличит счет только на 2 единицы, если же цех A не выполнит, а цех B выполнит – сократит свой счет на 1 единицу.
Требуется:

1. определить вероятность выполнения плана цехом B.
2. выяснить, зависит ли выполнение плана цехом A от того, выполнит или нет свой план цех B.
3. найти вероятность того, что предприятию придется снимать деньги со счета в банке.
4. определить, на сколько и в какую сторону (увеличения-уменьшения) изменится в среднем счет предприятия в банке по результатам работы в предстоящем месяце (ожидаемое изменение счета в банке).

$p_1 = 0,5,\ p_2 = 0,8,\ p_3 = 0,4$

Решение. Введем события:
A = (Цех A выполнит план),
B = (Цех B выполнит план).
Соответственно,
$\overline{A}$ = (Цех A не выполнит план),
$\overline{B}$ = (Цех B не выполнит план).

По условию известны следующие вероятности:
$P(A) = p_1 = 0,5$, $P(B|A) = p_2 = 0,8$, $P(\overline{A}\overline{B}) = p_3 = 0,4$.

Известно, что события AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ и $\overline{A}\overline{B}$ попарно несовместны и образуют полную группу.

По определению условной вероятности $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, откуда

$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$.

Из равенства $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ выразим $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0,5 - 0,4 = 0,1$.

Тогда $P(\overline{A}B) = 1 - P(AB) - P(A\overline{B}) - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - 0,4 - 0,1 - 0,4 = 0,1$.

Найдем из равенства $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = 0,4 + 0,1 = 0,5$.

Таким образом, вероятность выполнения плана цехом B равна $P(B)=0,5$.
Выясним, зависит ли выполнение плана цехом A от того, выполнит или нет свой план цех B. Найдем $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0,4}{0,5}=0,8\neq P(A)=0,5$, то есть выполнение плана цехом A зависит от того, выполнит или нет свой план цех B.

Найдем вероятность того, что предприятию придется снимать деньги со счета в банке.
Составим таблицу всех возможных исходов:

исход	AB	$A\overline{B}$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\,\overline{B}$
результат	5	2	-1	-4
вероятность	0,4	0,1	0,1	0,4

Вероятность того, что предприятию придется снимать деньги со счета в банке (-1 или -4 единицы):
$P=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})=0,1+0,4=0,5$.

Определим, как изменится в среднем счет предприятия в банке по результатам работы в предстоящем месяце, вычисляя математическое ожидание:
$M=5\cdot 0,4+2\cdot 0,1-1\cdot 0,1-4\cdot 0,4=0,5$.
Счет в среднем увеличится на 0,5 единиц.

Задача 35. Оптовая база заключает договоры с магазинами на снабжение товарами. Известно, что от каждого магазина заявка на обслуживание на очередной день может поступить на базу с вероятностью p, причем независимо от других магазинов.
Требуется:

1) определить минимальное количество магазинов (n_α), с которыми база должна заключить договоры, чтобы с вероятностью не менее α от них поступала хотя бы одна заявка на обслуживание в очередной день;
2) при найденном в пункте 1) значении n_α определить:

   a) наиболее вероятное число заявок (m^*) на обслуживание на очередной день и вероятность поступления такого количества заявок;

   b) вероятность поступления не менее $(n-1)$ заявок;

   c) математическое ожидание и дисперсию числа заявок на обслуживание на очередной день.

$p=0,5$, $\alpha=0,8$.

Решение. Пусть N - количество магазинов, с которыми база должна заключить договоры. Тогда вероятность того, что от них поступит хотя бы одна заявка в день равна $1-(1-p)^N=1-0,5^N$ и эта вероятность должна быть не менее $\alpha=0,8$. Получаем неравенство:

$1-0,5^N \geq 0,8,$

$0,5^N \leq 0,2,$

$N \geq \log_{0,5} 0,2 \approx 2,32.$

Получаем, что можно выбрать $n_\alpha = 3$ магазинам.

Далее полагаем, что $n=3$, $p=0,5$.

а) Найдем наиболее вероятное число заявок (m^*) на обслуживание на очередной день по формуле $np-q \leq m^* < np+p$. Подставляем наши данные:

$3\cdot 0,5-0,5 \leq m^* \leq 3\cdot 0,5+0,5$

$1 \leq m^* \leq 2.$

Получаем, что $m^*=1$ или $m^*=2$. Найдем вероятность поступления такого количества заявок по формуле Бернулли.

$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = 3\cdot 0,5^3 = 0,375,$

$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^1 = 3\cdot 0,5^3 = 0,375.$

b) Найдем вероятность поступления не менее $(n-1)=2$ заявок:

$P_3(k \geq 2) = P_3(2)+P_3(3) = 0,375 + C_3^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^0 = 0,375+0,5^3 = 0,5.$

с) Найдем математическое ожидание и дисперсию числа заявок на обслуживание на очередной день. Так как число заявок X распределено по биномиальному закону с параметрами $n=3$, $p=0,5$, то

$MX = np = 3\cdot 0,5 = 1,5,$

$DX = np(1-p) = 3\cdot 0,5\cdot 0,5 = 0,75.$

Задача 41. В автосалоне ежедневно выставляются на продажу автомобили двух марок - A и B. В течение дня продается X машин марки A и Y машин марки B, причем независимо от того, сколько их было продано в предыдущие дни. Машина марки A стоит 5 ед., машина марки B – 7 ед.

Закон распределения вероятностей системы (X,Y) задан таблицей:

x_i \ y_j	0	1	2
0	p_{11}	p_{12}	p_{13}
1	p_{21}	p_{22}	p_{23}
2	p_{31}	p_{32}	p_{33}

Требуется:

1) определить, какая марка машин пользуется в автосалоне наибольшим спросом;

2) выяснить, зависит ли число проданных автомашин марки A от числа проданных автомашин марки B;
3) найти ожидаемую (среднюю) дневную выручку автосалона;
4) оценить (с помощью дисперсии) возможные отклонения дневной выручки относительно среднего значения.

Пояснения: считать, что если $P(X>Y)>P(Y>X)$, то машины марки A пользуются большим спросом, чем машины марки B.

$p_{11}=0,03,\ p_{12}=0,05,\ p_{13}=0,02,$
$p_{21}=0,06,\ p_{22}=0,44,\ p_{23}=0,10,$
$p_{31}=0,01,\ p_{32}=0,21,\ p_{33}=0,08.$

Решение. Закон распределения вероятностей системы (X,Y) задан таблицей:

$x_i \setminus y_j$	**0**	**1**	**2**
0	0,03	0,05	0,02
1	0,06	0,44	0,1
2	0,01	0,21	0,08

Определим, какая марка машин пользуется в автосалоне наибольшим спросом. Считаем, что если $P(X>Y)>P(Y>X)$, то машины марки A пользуются большим спросом, чем машины марки B. Найдем вероятности:

$P(X>Y)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)=$
$=0,06+0,01+0,21=0,28.$
$P(Y>X)=P(Y=1,X=0)+P(Y=2,X=0)+P(Y=2,X=1)=$
$=0,05+0,02+0,10=0,17.$

Так как $P(X>Y)>P(Y>X)$, то машины марки A пользуются большим спросом, чем машины марки B.

Выясним, зависит ли число проданных автомашин марки A от числа проданных автомашин марки B, то есть зависимы ли величины X и Y.
Дополним таблицу распределения вероятностями для X и Y, суммируя в таблице значения по строкам и столбцам:

$x_i \setminus y_j$	**0**	**1**	**2**	p_x
0	0,03	0,05	0,02	0,1
1	0,06	0,44	0,1	0,6
2	0,01	0,21	0,08	0,3
p_y	0,1	0,7	0,2	1

Так как $0,03 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$, то случайные величины X и Y зависимы, поэтому число проданных автомашин марки A зависит от числа проданных автомашин марки B.

Найдем ожидаемую (среднюю) дневную выручку автосалона. Введем новую систему случайных величин, где вместо количества проданных машин будет фигурировать выручка от продажи:

$X_A \setminus Y_B$	**0**	**7**	**14**
0	0,03	0,05	0,02
5	0,06	0,44	0,1
10	0,01	0,21	0,08

Тогда можно ввести случайную величину $Z = X_A + Y_B$ - суммарную выручку от продажи машин с законом распределения (складываем выручку от продажи машин типа A и B и записываем соответствующую вероятность):

z	0	5	7	10	12	14	17	19	24
p	0,03	0,06	0,05	0,01	0,44	0,02	0,21	0,1	0,08

Тогда ожидаемая выручка будет равна:

$$MZ = \sum z_i p_i =$$

$$= 0 \cdot 0,03 + 7 \cdot 0,05 + 14 \cdot 0,02 + 5 \cdot 0,06 + 12 \cdot 0,44 + 19 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,01 + 17 \cdot 0,21 + 24 \cdot 0,08 = 13,7$$

единиц.

Оценим возможные отклонения дневной выручки относительно среднего значения. Вычислим дисперсию выручки:

$$DZ = \sum z_i^2 p_i - (MZ)^2 =$$

$$= 0 \cdot 0,03 + 7^2 \cdot 0,05 + 14^2 \cdot 0,02 + 5^2 \cdot 0,06 +$$

$$+ 12^2 \cdot 0,44 + 19^2 \cdot 0,1 + 10^2 \cdot 0,01 + 17^2 \cdot 0,21 + 24^2 \cdot 0,08 - 13,7^2 =$$

$$= 215,1 - 13,7^2 = 27,41.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_Z = \sqrt{DZ} \approx 5,235$. Оно характеризует отклонения выручки от среднего значения.

Если считать, что распределение выручки нормально, то с вероятностью 0,9973 выручка будет находиться в интервале

$$(MZ - 3\sigma_Z; MZ - 3\sigma_Z) = (13,7 - 3 \cdot 5,235;\ 13,7 - 3 \cdot 5,235) = (-2,005;\ 29,405).$$

Задача 67. Торговая фирма располагает разветвленной сетью филиалов и есть основания считать, что ее суммарная дневная выручка X является нормально распределенной случайной величиной. Выявленные значения этой величины по 100 рабочим дням представлены в виде следующего интервального ряда:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(x_{i-1};x_i)$	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)	(30;35)	(35;40)
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8

Требуется:

1) построить гистограмму относительных частот;
2) определить несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания m_x и дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ случайной величины X;
3) найти 95-процентные доверительные интервалы для m_x и σ_x.

№№	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
61	3	8	16	20	23	20	6	4
62	2	9	14	17	25	22	7	4
63	4	7	15	20	24	22	5	3
64	3	8	15	19	26	20	6	3
65	4	6	8	18	24	20	14	6
66	3	4	9	19	23	20	12	10
67	3	6	8	18	21	22	14	8

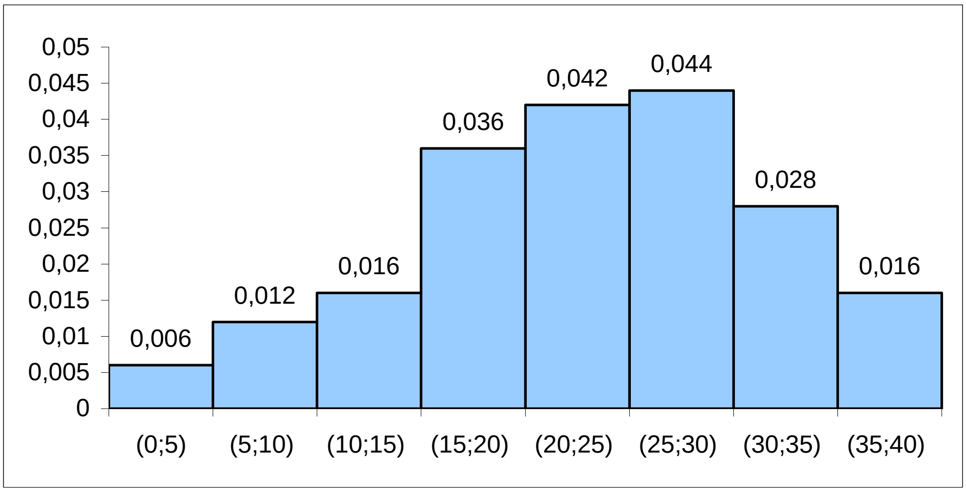
Решение. Получаем данные:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(x_{i-1};x_i)$	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)	(30;35)	(35;40)
n_i	3	6	8	18	21	22	14	8

Все интервалы имеют одинаковую длину $h=5$, поэтому плотности относительных частот найдем по формуле $f_i = \frac{n_i}{nh} = \frac{n_i}{500}$. Получим таблицу:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(x_{i-1};x_i)$	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)	(30;35)	(35;40)
n_i	3	6	8	18	21	22	14	8
f_i	0,006	0,012	0,016	0,036	0,042	0,044	0,028	0,016

Построим гистограмму относительных частот:



Определим несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания m_x и дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ случайной величины X.

Выборочная средняя:

$$m_x = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{100} 2300 = 23.$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$D_x = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i = \frac{1}{99} 7525 \approx 76,01,$$

$$\sigma_x = S = \sqrt{D_x} \approx 8,718.$$

Расчеты в таблице:

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	**Сумма**
n_i	3	6	8	18	21	22	14	8	**100**
$x_i n_i$	7,5	45	100	315	472,5	605	455	300	**2300**
$\left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i$	1260,8	1441,5	882	544,5	5,25	445,5	1263,5	1682	**7525**

Найдем 95-процентные доверительные интервалы для m_x и σ_x.

Найдем доверительный интервал для математического ожидания m_x с надежностью 0,95, используя формулу:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < M < \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где t_γ определяется из таблицы $t_\gamma(0,95;99) = 1,984$.

Получаем:

$$23 - 1,984\frac{8,718}{\sqrt{100}} < m_x < 23 + 1,984\frac{8,718}{\sqrt{100}},$$

$21,27 < m_x < 24,73$

Найдем доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с надежностью 0,95, используя формулу:
$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$, где q определяем из таблицы по заданным $n=100$ и $\gamma = 0,95$, откуда $q = 0,143$. Получаем после подстановки известных данных:
$8,718(1-0,143) < \sigma < 8,718(1+0,143)$
$7,471 < \sigma < 9,965$.

Задача 93. По результатам n замеров времени X изготовления детали определены выборочное среднее m_x^* и исправленная дисперсия s^2. Полагая распределение случайной величины X нормальным, на уровне значимости α решить, можно ли принять a_0 в качестве нормативного времени изготовления детали.

Пояснение: Основную гипотезу $H_0 : m_x = a_0$ проверить при альтернативной гипотезе H_a, указанной в исходных данных для решения задачи.

№№	n	m_x^*	s^2	α	a_0	H_a :
93	16	87,84	16	0,1	90	$m_x \neq a_0$

Решение. Нулевая гипотеза $H_0 : m_x = 90$, альтернативная $H_a : m_x \neq 90$.
Уровень значимости $\alpha = 0,1$, значит, критическая точка двусторонней области находится по формуле: $t(\alpha; n-1) = t(0,1;\ 15) = 1,753$.
Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$K_{набл} = \frac{m_x^* - a_0}{s}\sqrt{n} = \frac{87,84-90}{4}\sqrt{16} = -2,16.$$

Так как $|K_{набл}| = 2,16 > 1,753 = t$, то гипотеза $H_0 : m_x = 90$ отвергается.