Решение задачи вариационного исчисления

ЗАДАНИЕ. *Найти все экстремали функционала* $J(y)$, *удовлетворяющие указанным граничным условиям:*

$$J(y)=\int_0^{\pi/4}(4y\sin x+y'^2-y^2)dx;\ y(0)=y(\pi/4)=0.$$

РЕШЕНИЕ.

Для того чтобы функционал

$$V[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

определенный на множестве функций y = y(x), имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,$ достигал на данной функции y(x) экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера [1, с.13]

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде:

$$F_{y'y'}\cdot y''+F_{yy'}\cdot y'+F_{xy'}-F_y=0.$$

В нашем случае $F(x,y,y')=4y\sin x+y'^2-y^2$.

Найдем частные производные функции $F(x,y,y')=4y\sin x+y'^2-y^2$.

$$F_y(x,y,y')=4\sin x-2y.$$

$$F_{yy'}(x,y,y')=0.$$

$$F_{y'}(x,y,y')=2y'.$$

$$F_{y'y'}(x, y, y') = 2.$$

$$F_x(x, y, y') = 4y\cos x.$$

$$F_{xy'}(x, y, y') = 0.$$

Подставим найденные выражения в уравнение Эйлера.

$$2y''+0\cdot y'+0-4\sin x+2y=0;$$

$$2y''+2y=4\sin x;$$

$$y''+y=2\sin x.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение.

$$y''+y=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2+1=0$. Его корнями являются комплексные сопряженные числа: $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$. В этом случае общим решением однородного уравнения будет

$$y_{oo}=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

Здесь C_1, C_2 - константы.

Частным решением неоднородного уравнения является $y_{чн}=-x\cos x$.

Таким образом, общим решением уравнения $y''+y=2\sin x$ будет

$$y=y_{oo}+y_{чн}=C_1\sin x+C_2\cos x-x\cos x.$$

Из граничного условия $y(0)=0$

$y(0)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 1-0=C_2=0.$

Из граничного условия $y(\pi/4)=0$

$$y(\pi/4)=C_1\sin\pi/4+C_2\cos\pi/4-\pi/4\cos\pi/4=C_1\sqrt{2}/2-(\pi/4)\sqrt{2}/2=0,$$

откуда $C_1=\pi/4$.

Искомая экстремаль:

$$y=\frac{\pi}{4}\sin x-x\cos x.$$

Ответ: $y = \frac{\pi}{4}\sin x - x\cos x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 48 с.