Вариационное исчисление: поиск экстремалей с помощью уравнения Эйлера

ЗАДАНИЕ. *Для указанной вариационной задачи записать уравнение Эйлера и найти экстремаль, удовлетворяющую условиям y(0) = 19, y(1)=30*

$$\int_0^1 (1+y'^2)\,dx.$$

РЕШЕНИЕ.

Известно [1, с.13], что для того чтобы функционал

$$V[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx.$$

определенный на множестве функций y=y(x), имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям

$$y(x_0)=y_0,\; y(x_1)=y_1,$$

достигал на данной функции y(x) экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера:

$$F_{y'y'}\cdot y''+F_{yy'}\cdot y'+F_{xy'}-F_y=0.$$

В нашем случае, $F(x,y,y')=1+y'^2$. Функция F зависит только от y', поэтому $F_{yy'}=F_{xy'}=F_y=0$. Следовательно, уравнение Эйлера в этом случае имеет вид:

$$y''F_{y'y'}=0.$$

Найдем $F_{y'y'}$.

$$F(x,y,y')=1+y'^2.$$

$$F_{y'}=2y';$$

$$F_{y'y'}=2.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$2y''=0 \text{ или } y''=0.$$

Проинтегрируем обе части равенства по x дважды.

$$\int y''dx=\int 0dx;$$
$$y'=C_1;$$
$$\int y'=\int C_1dx;$$
$$y=C_1x+C_2.$$

Здесь C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Найдем экстремаль, удовлетворяющую граничным условиям.

Из условия $y(0)=19$ следует, что

$$y(0)=C_1\cdot 0+C_2=C_2=19.$$

Из условия $y(1)=30$ следует, что

$$y(1)=C_1\cdot 1+C_2=C_1+19=30 \text{ , откуда } C_1=11.$$

Таким образом, экстремаль $y=11x+19$ удовлетворяет исходным граничным условиям.

Ответ: $y=11x+19$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 48 с.