Вариационное исчисление
Решение классической задачи поиска экстремума функционала

Задание.

Решить классическую задачу вариационного исчисления:

$$4.\quad \int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\quad x(0)=1,\quad x(1)=0.$$

Решение.

1. Запишем необходимое условие слабого, а значит, и сильного экстремума — уравнение Эйлера [1, с.10]

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} 2\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = const.$$

Общее решение уравнения Эйлера:

$$x(t) = C_1 t + C_2.$$

Из условий на концах находим C_1, C_2:

$$x(0) = C_2 = 1;\ x(1) = C_1 + C_2 = C_1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1.$$

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\hat{x} = \hat{x}(t) = -t + 1.$$

2. Проверим $\hat{x} = \hat{x}(t) = -t + 1$ на необходимые и достаточные условия экстремума.

2.1. Усиленное условие Лежандра выполнено:

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2 > 0,\ \forall t \in [0,1],$$

следовательно, переходим к проверке условия Якоби.

2.2. Выпишем уравнение Якоби на экстремали $\hat{x}$. Его общий вид [1, с.8]:

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right)+\widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{f}_{xx}(t)h(t)=0$$

В нашем случае уравнение Якоби имеет вид:

$$\frac{d}{dt}2\dot{h}(t)=0 \Leftrightarrow \ddot{h}(t)=0 .$$

Общее решение уравнения Якоби

$$h(t)=C_1t+C_2 .$$

Начальным условиям

$$h(0)=0, \dot{h}(0)=1$$

удовлетворяет функция

$$h(t)=t .$$

2.3. Функция $h(t)=t$ не имеет нулей в полуинтервале $(0,1]$. Значит, сопряженных точек нет, и, стало быть, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, выполнено достаточное условие слабого локального минимума, то есть $\hat{x}\in wloc\min$.

2.4. Проверим на сильный экстремум.

а) Поскольку функция $f=\dot{x}^2$ не выпукла по $\dot{x}$, то достаточное условие сильного минимума не выполняется.

б) Проверим необходимое условие сильного минимума – условие Вейерштрасса [1,с.7].

$$\mathcal{E}(t,\widehat{x},\dot{\widehat{x}},u)=f(t,\widehat{x},u)-f(t,\widehat{x},\dot{\widehat{x}})-\widehat{f}_{\dot{x}}(t)(u-\dot{x}) .$$

$$\varepsilon(t,\hat{x},\dot{\hat{x}},u)=u^2-\dot{\hat{x}}^2-2\dot{\hat{x}}(u-\dot{\hat{x}})=u^2-\dot{\hat{x}}^2-2\dot{\hat{x}}(u-\dot{\hat{x}})=u^2-1+2(u+1)=u^2+2u+1=(u+1)^2\geq 0$$
$$\forall u\in R,\ \forall t\in[0,1] .$$

Значит, условие Вейерштрасса выполнено, то есть, допустимая экстремаль доставляет сильный локальный минимум.

Поскольку интегрант является квадратичным, то допустимая экстремаль доставляет абсолютный минимум.

ОТВЕТ: $\hat{x}(t) = -t + 1 \in abs\min$, $J(\hat{x}) = 1$.