Задача с решением по уравнению с математической физики
Задача Коши для уравнения теплопроводности

ЗАДАНИЕ.

Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

$$u_t = 13u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = e^{-3x^2+2x}.$$

РЕШЕНИЕ.

Формула Пуассона имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi,$$

где $a=\sqrt{13}$, $\varphi(x) = u\big|_{t=0} = e^{-3x^2+2x}$.

Таким образом для решения задачи необходимо вычислить несобственный интеграл, зависящий от параметров:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\xi^2+2\xi-\frac{(x-\xi)^2}{52t}}d\xi.$$

Преобразуем интеграл к виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\xi^2+2\xi-\frac{(x-\xi)^2}{52t}}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{156\xi^2t-104\xi t+x^2-2x\xi+\xi^2}{52t}}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{52t}\left[-(156t+1)\left(\xi-\frac{52t+x}{156t+1}\right)^2-x^2+\frac{(52t+2x)^2}{156t+1}\right]}d\xi =$$

$$e^{-\frac{1}{52t}\left(x^2-\frac{(52t+2x)^2}{156t+1}\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(156t+1)}{52t}\left(\xi-\frac{52t+x}{156t+1}\right)^2}d\xi = \left[\begin{array}{l}\xi-\dfrac{52t+x}{156t+1}=\zeta\\ d\xi = d\zeta\end{array}\right] =$$

$$= e^{\frac{-3x^2+52t+2x}{156t+1}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(156t+1)}{52t}\zeta^2}d\zeta.$$

Теперь воспользуемся известным из математического анализа соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax)^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a};$$

тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(156t+1)}{52t}\zeta^2}d\zeta = \frac{\sqrt{52\pi t}}{\sqrt{156t+1}}.$$

Таким образом получим решение поставленной задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{13\pi t}}\frac{\sqrt{52\pi t}}{\sqrt{156t+1}}e^{\frac{-3x^2+52t+2x}{156t+1}}=\frac{1}{\sqrt{156t+1}}e^{\frac{-3x^2+52t+2x}{156t+1}}.$$