Задача по уравнению с математической физики с решением
Уравнение Пуассона в кольце

ЗАДАНИЕ.

Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Пуассона в кольце $0<a<\rho<b$ *при* $m=1,2,3$.

$$\Delta u(\rho,\varphi)=2,$$
$$u(a,\varphi)=0,\ u(b,\varphi)=\cos m\varphi.$$

РЕШЕНИЕ.

Ищем решение в виде суммы функций $u=v+w$, где w - решение неоднородной задачи:

$$\Delta w(\rho,\varphi)=2$$

Ищем ее в виде $w=w(\rho)$. Получаем:

$$w''=2,$$
$$w'=2\rho+C_1,$$
$$w=\rho^2+C_1\rho+C_2.$$

Получили $w=\rho^2+C_1\rho+C_2$. Для определенности можно выбрать $C_1=C_2=0$,
$w=\rho^2$

Теперь возвращаемся к второй функции $v(\rho,\varphi)$. Получаем для нее следующую задачу:

$$\Delta v(\rho,\varphi)=0,$$
$$v(a,\varphi)=u(a,\varphi)-w(a,\varphi)=-a^2,$$
$$v(b,\varphi)=u(b,\varphi)-w(b,\varphi)=\cos m\varphi-b^2.$$

Решаем данную задачу для уравнения Лапласа в кольце.
Частные решения имеют вид:

$$u_0(\rho,\varphi)=\alpha_0+\beta_0\ln\rho,$$
$$u_n(\rho,\varphi)=\left(\alpha_n\rho^n+\beta_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(c_n\rho^n+d_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi$$

Общее решение

$$u(\rho,\varphi)=\alpha_0+\beta_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_n\rho^n+\beta_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(c_n\rho^n+d_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi\right].$$

Найдем значения констант из граничных условий

$$v(a,\varphi)=\alpha_0+\beta_0\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_n a^n+\beta_n a^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(c_n a^n+d_n a^{-n}\right)\sin n\varphi\right]=-a^2,$$

$$v(b,\varphi)=\alpha_0+\beta_0\ln b+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_n b^n+\beta_n b^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(c_n b^n+d_n b^{-n}\right)\sin n\varphi\right]=\cos m\varphi-b^2.$$

Сопоставляя правую и левую часть каждого выражения, найдем:

$\alpha_0+\beta_0\ln a=-a^2,$

$\alpha_0+\beta_0\ln b=-b^2,$

$\alpha_m b^m+\beta_m b^{-m}=1,$

$\alpha_m a^m+\beta_m a^{-m}=0,$

$\alpha_n=\beta_n=0,\ n\neq m.$

$c_n=d_n=0.$

$$\alpha_0=\frac{b^2\ln a-a^2\ln b}{\ln b-\ln a},$$

$$\beta_0=\frac{a^2-b^2}{\ln b-\ln a},$$

$$\alpha_m=\frac{a^{-m}}{(b/a)^m-(a/b)^m},$$

$$\beta_m=\frac{-a^m}{(b/a)^m-(a/b)^m},$$

$\alpha_n=\beta_n=0,\ n\neq m.$

$c_n=d_n=0.$

Итак, общее решение уравнения имеет вид:

$$u(\rho,\varphi)=\rho^2+\frac{b^2\ln a-a^2\ln b}{\ln b-\ln a}+\frac{a^2-b^2}{\ln b-\ln a}\ln\rho+$$
$$+\left[\frac{a^{-m}}{(b/a)^m-(a/b)^m}\rho^m-\frac{a^m}{(b/a)^m-(a/b)^m}\rho^{-m}\right]\cos m\varphi.$$

Здесь $m=1,2,3$.