Задача по уравнению с математической физики с решением
Неоднородное уравнение теплопроводности

ЗАДАНИЕ.

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 1,\ u(1,t) = 2,$$
$$u(x,0) = x + 1.$$

РЕШЕНИЕ.

Ищем решение в виде суммы двух функции: $u = U + v$, где на U ставим условия
$U(0,t) = 1,\ U(1,t) = 2$.
Пусть $U(x,t) = A(t)x + B(t)$, тогда очевидно, что $B(t) = 1, A(t) = 1$ и $U(x,t) = x + 1$.

Получаем задачу для функции v:

$$v_t = a^2 v_{xx} + 2x + 1,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$v(0,t) = 0,\ v(1,t) = 0,$$
$$v(x,0) = 0.$$

Ищем ее решение в виде разложения по собственным функциям следующего вида:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \pi n x.$$

Разложим $f(x,t) = 2x + 1$ по тем же функциям: $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \pi n x$, где

$$f_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t) \sin \pi n x dx = 2\int_0^1 (2x+1) \sin \pi n x dx = \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n}.$$

Подставляем все в уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n(t))' \sin \pi n x = a^2 (\pi n)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \pi n x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(C_n(t))' - (a\pi n)^2 C_n(t) - f_n(t) \right] \sin \pi n x = 0.$$

Пришли к уравнению:

$$\begin{cases} \left(C_n(t)\right)' - (a\pi n)^2 C_n(t) = f_n(t), \\ C_n(0) = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $C_n = c_n(t) e^{-(\pi n a)^2 t}$ (по методу вариации постоянной) и получаем:

$$\begin{cases} c_n'(t) e^{-(\pi n a)^2 t} = f_n(t), \\ c_n(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$c_n = \int_0^t f_n(\tau) e^{(\pi n a)^2 \tau} d\tau + A = \int_0^t \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n} e^{(\pi n a)^2 \tau} d\tau + A = \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n} \int_0^t e^{(\pi n a)^2 \tau} d\tau + A =$$

$$= \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n (\pi n a)^2} \left[e^{(\pi n a)^2 t} - 1 \right] + A.$$

Постоянная $A = 0$ из начального условия $c_n(0) = 0$.

И тогда:

$$C_n = c_n(t) e^{-(\pi n a)^2 t} = \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n (\pi n a)^2} \left[e^{(\pi n a)^2 t} - 1 \right] e^{-(\pi n a)^2 t} = \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n (\pi n a)^2} \left[1 - e^{-(\pi n a)^2 t} \right].$$

Искомое решение:

$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(6(-1)^{n+1} + 2\right)}{\pi n (\pi n a)^2} \left[1 - e^{-(\pi n a)^2 t} \right] \sin \pi n x.$$