

Пример с решением

Дифференциальное уравнение в частных производных (задача Коши)

ЗАДАНИЕ.

Найти решение задачи Коши

$$\begin{aligned}yu_x - xu_y &= 2xu \\ u|_{x+y=2} &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ.

Составим систему уравнений:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-xy} = \frac{du}{2xu}$$

Решая систему, найдем два независимых интеграла

1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{y} &= \frac{dy}{-xy} \\ -xdx &= dy \\ -\frac{x^2}{2} + C &= y \\ 2y + x^2 &= C_1\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{-xy} &= \frac{du}{2xu} \\ -\frac{dy}{y} &= \frac{du}{2u} \\ -\ln y + C &= \frac{1}{2} \ln u \\ 2 \ln \frac{C}{y} &= \ln u \\ uy^2 &= C_2\end{aligned}$$

Теперь исключим переменные x, y, u из соотношений

$$\begin{aligned}2y + x^2 &= C_1 \\ uy^2 &= C_2 \\ x + y &= 2 \\ u &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$

Подставим последнее выражение вместо u во второе. Получим:

$$2y + x^2 = C_1$$

Задача по УМФ скачана с <https://www.matburo.ru/> (много бесплатных примеров на сайте)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\begin{aligned}y &= C_2 \\x + y &= 2\end{aligned}$$

Теперь выражение для y подставим в первое и третье соотношения.

$$\begin{aligned}2C_2 + x^2 &= C_1 \\x + C_2 &= 2\end{aligned}$$

Из второго: $x = 2 - C_2$. Подставив в первое, получим:

$$2C_2 + (2 - C_2)^2 = C_1$$

Упростим:

$$C_1 - C_2^2 + 2C_2 - 4 = 0$$

Подставим выражения для C_1, C_2 , получим уравнение искомой поверхности:

$$2y + x^2 - u^2y^4 + 2uy^2 - 4 = 0$$

ОТВЕТ: $2y + x^2 - u^2y^4 + 2uy^2 - 4 = 0$