Задача с решением по уравнению с математической физики
Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Задание.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для круга:

$\Delta u = 0, \quad 0 \le r < R; \quad u\big|_{r=R} = f(\varphi).$

$R = 3, \; f(\phi) = \phi^2 + 6\phi + 1.$

Решение.

Уравнение Лапласа в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Применим метод разделения переменных, т.е. будем искать решение в виде: $u = R(r)F(\varphi)$, тогда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)F + R\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0,$$

$$\frac{1}{R}r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -\lambda = const.$$

Рассмотрим уравнение для F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \lambda F = 0.$$

Требуется отыскать все значения λ, при которых уравнение имеет нетривиальное 2π-периодическое решение.

Пусть $\lambda > 0$, тогда

$$F = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

$$F(\varphi) = F(2\pi k + \varphi).$$

Очевидно такое возможно если $\sqrt{\lambda} = n$ - целое число, значит решение задачи на собственные значения имеет вид:

$$\lambda = n^2, \; n \in \mathbf{Z},$$

$$F = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Очевидно что при $\lambda \le 0$ уравнение периодических решений не имеет.

Функцию $R(r)$ будем искать в виде $R = r^\mu$; тогда подставляя в уравнение для R и сокращая на r^μ, получим $n^2 = \mu^2$ или $\mu = \pm n$, что дает два линейно независимых решения. Общее решение будет суммой частных решений:

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}.$$

Поскольку мы рассматриваем внутреннюю задачу, следует положить $D = 0$. Тогда частное решение уравнения Лапласа будет иметь вид

$$u_n = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

а общее решение запишется в виде суммы частных решений:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Константы A_n и B_n можно найти из условия на границе круга. Для этого функцию $u\big|_{r=3} = f(\varphi) = \varphi^2 + 6\varphi + 1$ необходимо разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right],$$

Приравнивая коэффициенты в выражении для u и в разложении f, получим

$$A_0 = \frac{a_0}{2},\ A_n = \frac{a_n}{\rho^n},\ B_n = \frac{b_n}{\rho^n},$$

где $\rho = 3$ - радиус окружности.

Коэффициенты ряда Фурье находятся по известным формулам

Коэффициенты .a_n и b_n определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

Интеграл для a_0 представляется в виде суммы табличных интегралов, а остальные два интеграла можно вычислить, применив дважды метод интегрирования по частям. В результате получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 + 6\varphi + 1) d\varphi = \frac{2\pi^2}{3} + 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 + 6\varphi + 1) \cos(n\varphi) d\varphi = (-1)^n \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 + 6\varphi + 1) \sin(n\varphi) d\varphi = (-1)^{n+1} \frac{12}{n}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле имеет вид:

$$u = 2 + \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\rho}{3}\right)^n \frac{1}{n^2} (\cos n\varphi + 3n \sin n\varphi).$$