

Формула включений и исключений

Пример решения задачи

Задача. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60 % студентов читают журнал А, 50 % - журнал В, 50 % журнал С, 30 % -- журналы А и В, 20 % - журналы В и С, 40 % журналы А и С, 10 % - журналы А, В и С. Выяснить, сколько процентов студентов:

- 1) не читает ни одного из журналов;
- 2) читает в точности два журнала;
- 3) читает не менее двух журналов.

Решение:

Общее количество студентов примем за 100 (в процентах)

Пусть:

А – множество студентов, читающих журнал А (в процентах).

Мощность этого множества $m(A) = 60$.

В – множество студентов, читающих журнал В (в процентах)..

Мощность этого множества $m(B) = 50$.

С– множество студентов, читающих журнал С (в процентах)..

Мощность этого множества $m(C) = 50$.

$A \cap B$ – множество студентов, читающих журнал А и В, $m(A \cap B) = 30$.

$B \cap C$ – множество студентов, читающих журнал В и С, $m(B \cap C) = 20$.

$A \cap C$ – множество студентов, читающих журнал А и С, $m(A \cap C) = 40$.

$A \cap B \cap C$ – множество студентов, читающих все три журнала, $m(A \cap B \cap C) = 10$.

Используем для решения задачи формулу включений и исключений.

Для трёх множеств А, В, С эта формула принимает следующий вид:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C).$$

- 1) не читает ни одного из журналов:

Найдём процент студентов, которые читают хотя бы один журнал:

$$\begin{aligned} m(A \cup B \cup C) &= m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) = \\ &= 60 + 50 + 50 - 30 - 20 - 40 + 10 = 80. \end{aligned}$$

Следовательно, ни одного из журналов не читают $100 - 80 = 20\%$ студентов.

2) читает в точности два журнала:

Процент студентов, которые читают ровно два журнала можно найти, если сложить студентов, которые читают хотя бы два журнала и из каждого из этих множеств вычесть студентов, которые читают все 3 журнала, т.е. следующим образом:

$$m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - 3 \cdot m(A \cap B \cap C) = 30 + 20 + 40 - 3 \cdot 10 = 60.$$

Следовательно, ровно 2 журнала читают 60% студентов.

3) читает не менее двух журналов.

Число студентов, которые читают не менее двух журналов равно числу студентов, которые читают ровно 2 журнала или ровно 3 журнала, т.е. равно

$$60\% + 10\% = 70\%$$