Тема: Случайные события (Чудесенко, задача 10, вариант 6)

ЗАДАНИЕ. *Два игрока А и В поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет герб. Первый бросок делает игрок А, второй – В, третий – А и т.д.*
1. Найти вероятность того, что А выиграл до k броска.
2. Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?
k=9.

РЕШЕНИЕ.
Вероятность выпадения герба и решки одинаковы, $p = q = 0,5$.
Вероятность того, что А выиграет на первом броске равна 0,5 (при первом броске у А выпадет герб).
Вероятность того, что А выиграет на втором броске равна $0,5^3$ (при первом броске у А выпадет решка – 0,5, при первом броске у В выпадет решка – 0,5, при втором броске у А выпадет герб – 0,5).
Аналогично, вероятность того, что А выиграет на k броске равна $0,5^{2k-1}$.

Тогда вероятность того, что А выиграет до 9 броска равна сумме вероятностей того, что А выиграет на 1 броске, на 2 броске, …, на 8 броске.

Получаем:
$$P = \sum_{k=1}^{8} 0,5^{2k-1} = 0,5 + 0,5^3 + 0,5^5 + \ldots + 0,5^{15} \approx 0,6667.$$

Чтобы найти вероятность выигрыша игрока А при сколь угодно долгой игре, нужно положить $k \to \infty$. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$) получаем:

$$P_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 0,5^{2k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} 0,5^{2k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (1/4)^k = 2\cdot\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(1/4)^k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$ - вероятность победы игрока А, тогда вероятность победы игрока В равна $1-2/3=1/3$.

ОТВЕТ: 0,6667; 2/3; 1/3.