

Равномерный закон распределения: задача с решением

Задача. В здании областной администрации случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 3 минут. Найти а) плотность распределения времени ожидания, б) вероятность ожидания лифта более чем 2 минуты, в) вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 15 секунд, г) среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания.

Решение. Пусть случайная величина X – время ожидания лифту от момента прихода, $0 < X < 3$. X имеет равномерное распределение на интервале $(a, b) = (0, 3)$, то есть плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найдем вероятность ожидания лифта более чем 2 минуты:

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_2^3 = \frac{1}{3} \approx 0,333.$$

Найдем вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 15 секунд = $\frac{1}{4}$ минуты.

$$P(0 < X < 1/4) = \int_0^{1/4} f(x) dx = \int_0^{1/4} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_0^{1/4} = \frac{1}{12} \approx 0,083.$$

Найдем среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания по формулам для равномерного распределения:

$$\text{Математическое ожидание равно } M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = 1,5 \text{ минуты.}$$

$$\text{Дисперсия равна } D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ минут}^2.$$