Решение задачи: непрерывная случайная величина, закон логарифма.

Задание.

Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Найти:

А) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a;b)$.

Б) дифференциальную функцию (функцию плотности вероятностей) $f(x)$.

В) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ \ln x, \ 1 < x \le e, \\ 1, \ x > e. \end{cases}$$

$a=2, \ b=e$.

Решение. Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a;b)=(2;e)$.

$P(2 < X < e) = F(e) - F(2) = 1 - \ln 2 \approx 0,307$.

Найдем дифференциальную функцию распределения $f(x)$ по определению

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ 1/x, \ 1 < x \le e, \\ 0, \ x > e. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx = \int_1^e \frac{xdx}{x} = \int_1^e dx = x\Big|_1^e = e-1 \approx 1,718.$$

Дисперсия:

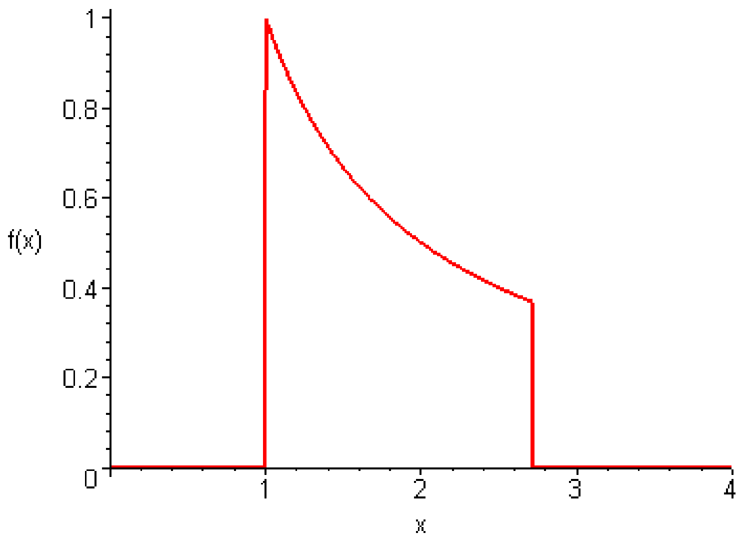
$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - (m_X)^2 = \int_1^e \frac{x^2 dx}{x} - (e-1)^2 = \int_1^e xdx - (e-1)^2 =$$

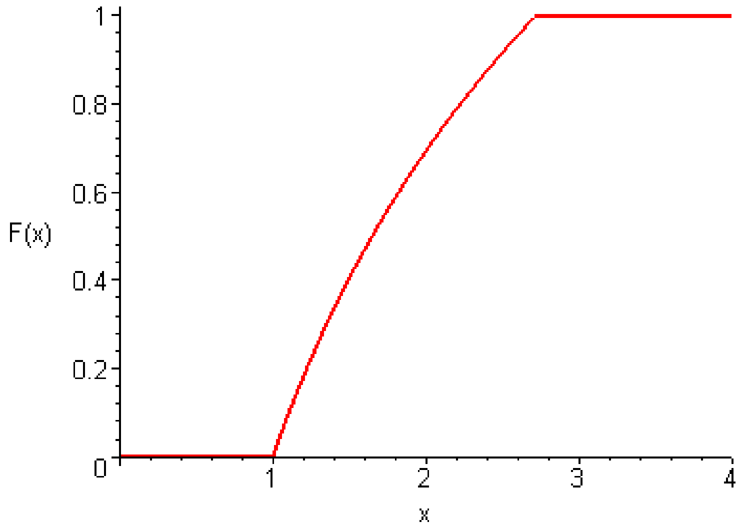
$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e - (e-1)^2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - e^2 + 2e - 1 = -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} \approx 0,242.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0,242} \approx 0,492$.

Построим графики $f(x)$ и $F(x)$.


f(x)
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
2
3
4


F(x)
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
2
3
4