Характеристическая функция суммы нормальных величин

Задача. С помощью характеристических функций, доказать, что сумма независимых нормально распределенных случайных величин имеет нормальное распределение. Указать параметры этого распределения.

Решение.
Пусть даны два нормальных распределения с параметрами (a_1,σ_1) и (a_2,σ_2).
Используем формулу для характеристической функции от суммы: $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Для нормальной величины с плотностью $\rho(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}, a\in\mathbb{R},\sigma>0$

характеристическая функция имеет вид $\varphi_X(t)=e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Расчеты:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2-2(a+it\sigma^2)x+a^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2-2(a+it\sigma^2)x+(a+it\sigma^2)^2+a^2-(a+it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}*e^{\frac{2ait\sigma^2+(it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}*dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{2ait\sigma^2-t^2\sigma^4}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}d\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right)*\sqrt{2}\sigma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\sqrt{\pi}=e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Получаем $\varphi_{X+Y}(t)=e^{ia_1t-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}*e^{ia_2t-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}}=e^{i(a_1+a_2)t-\frac{t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}$
Значит, данное распределение также является нормальным.

Найдем параметры данного распределения
$M(X+Y)=-i\varphi'_{X+Y}(0)$
$D(X+Y)=-\varphi''_{X+Y}(0)+\left(\varphi'_{X+Y}(0)\right)$

$$\varphi'_{X+Y}(t)=e^{i(a_1+a_2)t-\frac{t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}\left(i(a_1+a_2)-t\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)$$

$$\varphi'_{X+Y}(0)=e^{i(a_1+a_2)*0-\frac{0^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}\left(i(a_1+a_2)-0\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)=i(a_1+a_2)$$

$$\varphi''_{X+Y}(t)=e^{i(a_1+a_2)t-\frac{t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}\left(i(a_1+a_2)-t\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)^2+e^{i(a_1+a_2)t-\frac{t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}\left(-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)$$

$$\varphi''_{X+Y}(0)=e^{i(a_1+a_2)*0-\frac{0^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}\left(i(a_1+a_2)-0\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)^2+e^{i(a_1+a_2)*0-\frac{0^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{2}}\left(-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)=$$

$$=\left(i(a_1+a_2)\right)^2-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)=-(a_1+a_2)^2-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$$

Тогда:

$$M(X+Y)=-i\varphi'_{X+Y}(0)=-i*i(a_1+a_2)=a_1+a_2$$

$$D(X+Y)=-\varphi''_{X+Y}(0)+\left(\varphi'_{X+Y}(0)\right)^2=-\left(-(a_1+a_2)^2-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\right)+\left(i\left(a_1+a_2\right)\right)^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$