Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Характеристическая функция биномиального распределения

Задача. По заданному закону распределения найти характеристическую функцию $\varphi(t)$, кумулянтную функцию $\gamma(t)$ и первые четыре семиинварианта этого распределения.

Биномиальный закон (Бернулли) $P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $0<p<1$, $k=0,1,2,...,n$.

Решение.

Рассмотрим биномиальный закон (Бернулли) $P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $0<p<1$, $k=0,1,2,...,n$.

Получаем характеристическую функцию:

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{itk}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} C_n^k\left(pe^{it}\right)^k(1-p)^{n-k}=\left(pe^{it}+1-p\right)^n.$$

Тогда кумулянтная функция

$$\psi(t)=\ln\varphi(t)=\ln\left(\left(pe^{it}+1-p\right)^n\right)=n\ln\left(pe^{it}+1-p\right).$$

Вычисляем производные:

$$\psi'(t)=\left(n\ln\left(pe^{it}+1-p\right)\right)'=\frac{npie^{it}}{pe^{it}+1-p},$$

$$\psi''(t)=\left(\frac{npie^{it}}{pe^{it}+1-p}\right)'=\frac{npe^{it}(p-1)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^2},$$

$$\psi'''(t)=\left(\frac{npe^{it}(p-1)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^2}\right)'=\frac{-inpe^{it}(p-1)\left(pe^{it}+p-1\right)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^3},$$

$$\psi^{(4)}(t)=\left(\frac{-inpe^{it}(p-1)\left(pe^{it}+p-1\right)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^3}\right)'=-\frac{npe^{it}(p-1)\left(p^2e^{2it}+1-2p+p^2-4pe^{it}+4p^2e^{it}\right)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^4}.$$

Тогда семиинварианты:

$$\gamma_1=\frac{1}{i}\psi'(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{i}\frac{npie^{it}}{pe^{it}+1-p}\Big|_{t=0}=np,$$

$$\gamma_2=\frac{1}{i^2}\psi''(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{i^2}\frac{npe^{it}(p-1)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^2}\Bigg|_{t=0}=np(1-p),$$

$$\gamma_3=\frac{1}{i^3}\psi'''(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{i^3}\frac{-inpe^{it}(p-1)\left(pe^{it}+p-1\right)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^3}\Bigg|_{t=0}=np(p-1)(2p-1),$$

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$\gamma_4 = \frac{1}{i^4}\psi^{(4)}(t)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{i^4}\frac{npe^{it}(p-1)\left(p^2e^{2it}+1-2p+p^2-4pe^{it}+4p^2e^{it}\right)}{\left(pe^{it}+1-p\right)^4}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= -np(p-1)\left(6p^2-6p+1\right).$$