Характеристическая функция: пример решения задачи

Задача. По заданному закону или плотности распределения случайной величины ξ найти характеристическую функцию $\varphi(t)$.

Закон Пуассона: $P(\xi=k)=\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, $a>0,\ k=1,2,\dots$.

$a=0,38$.

Решение. По определению, характеристическая функция для дискретного распределения равна: $\varphi(t)=M\left[e^{it\xi}\right]=\sum_i e^{tx_i}p_i$.

Получаем: $\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}\dfrac{a^k}{k!}=e^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(e^{it}a\right)^k}{k!}=e^{-a}\left(e^{e^{it}a}-1\right)=e^{a\left(e^{it}-1\right)}-e^{-a}$

При $a=0,38$ получаем: $\varphi(t)=e^{0,38\left(e^{it}-1\right)}-e^{-0,38}$

Замечание:
Вообще надо считать $k=0,1,2,\dots$, тогда суммирование будет от 0 и получим:

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{a^k}{k!}=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{it}a\right)^k}{k!}=e^{-a}e^{e^{it}a}=e^{a\left(e^{it}-1\right)}=\exp\left(a\left(e^{it}-1\right)\right).$$