Тема: Геометрическое определение вероятности

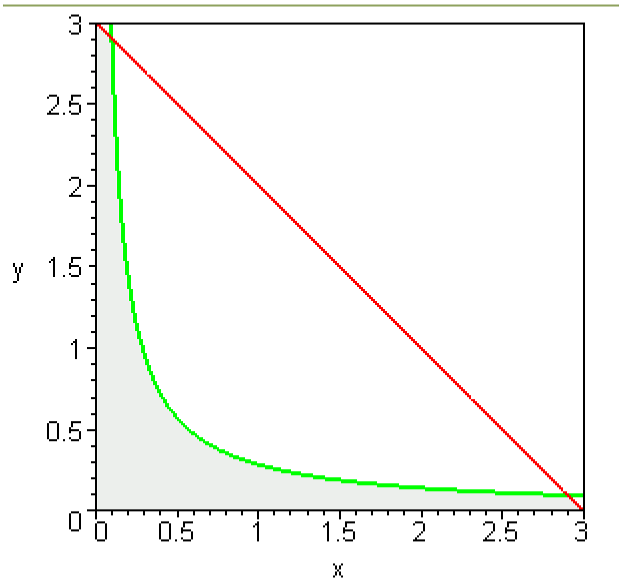
ЗАДАНИЕ. *Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше трех, не превзойдет трех, а их произведение будет не больше 2/7?*

РЕШЕНИЕ. Используем геометрическое определение вероятности. Так как числа x и y берутся из отрезка (0,3) (положительные и не больше 3), можно считать, что выбирается точка с координатами (x, y) из квадрата на плоскости: $(0,3)\times(0,3)$.

Должны выполняться условия:
1) $x+y\le 3$ или $y\le 3-x$,

2) $xy\le \frac{2}{7}$ или $y\le \frac{2}{7x}$.

Вероятность того, что выполняются эти условия равно отношению площади фигуры, определяемой этими ограничениями (в квадрате) к площади квадрата, то есть к 9.
Чтобы подсчитать площадь фигуры, сделаем схематический чертеж.



Красная линия – первое ограничение, зеленая – второе ограничение. Так как y должен лежать ниже обеих линий, то оба ограничения выполняются в нижней закрашенной фигуре.
Найдем точки пересечения кривых:

$$3-x=\frac{2}{7x},$$
$$21x-7x^2=2,$$
$$7x^2-21x+2=0,$$
$$x_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{385}}{14},$$
$$x_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{385}}{14}.$$

Найдем площадь закрашенной фигуры как площадь половины квадрата минус площадь части, которая из нее «вырезана» (между зеленой и красной линиями):

$$S=\frac{9}{2}-\int\limits_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{385}}{14}}^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{385}}{14}}\left(3-x-\frac{2}{7x}\right)dx=\frac{9}{2}-\left(3x-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{7}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{385}}{14}}^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{385}}{14}}=$$
$$=\frac{9}{2}-\left(3\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{385}}{14}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{385}}{14}\right)^2-\frac{2}{7}\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{385}}{14}\right)\right)+$$
$$+\left(3\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{385}}{14}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{385}}{14}\right)^2-\frac{2}{7}\ln\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{385}}{14}\right)\right)\approx 1,262.$$

Поэтому искомая вероятность равна $P=\frac{S_{фиг.}}{S_{квад.}}=\frac{1,262}{9}\approx 0,14.$

Ответ. 0,14.